HISTORIA DE LAS MATEMATICAS

POR

CARLOS WARGNY

(*Conclusion*)

CAPITULO XIX.—LAS MATEMATICAS EN EL SIGLO XIX

En el siglo XIX, surjieron varias ramas nuevas de las Matemáticas puras; la Aritmética Superior, la Trigonometría Superior i el Análisis Superior han abierto horizontes vastos i desconocidos; i la aplicacion de las Ciencias Esactas a la Física ha revolucionado sus fundamentos i modificado la esposicion de sus teorías. De modo que semejante ensanchamiento de tan numerosas doctrinas ha de considerarse como formando un nuevo período en nuestra historia. No obstante el interes particular que presenta el estudio detallado de esta época, nos es casi imposible emitir un juicio completo e imparcial sobre las producciones intelectuales de aquellos autores que aun existen i que conocemos; i para facilitar nuestra tarea, hemos tenido que eliminar muchas obras de segundo órden i concretarnos a estudiar las principales, dando a conocer al mismo tiempo la vida de sus autores. Para este fin nos han servido los diversos escritos históricos que se refieren al siglo XIX.

Despues de la muerte de los grandes matemáticos Lagrange, Laplace, Legendre i Poisson, la Escuela Francesa descansó un momento de la importante labor que realizara a fines del siglo XVIII, para emprender de nuevo un vuelo tan atrevido como brillante. Los matemáticos Gauss, Abel i Jacobi, de quienes nos ocuparemos en seguida, fueron contemporáneos de los anteriores.

Cárlos Federico *Gauss* (1777-1855) nació en Brunswick i murió en Gotinga. Era hijo de un simple albañil i fué educado a espensas del duque reinante que supo adivinar sus estraordinarias facultades intelectuales. A los 18 años poseía todos los conocimientos que pudieron enseñarle sus profesores; publicó su método de los mínimos cuadrados i estableció por induccion la lei de reciprocidad cuadrática. En la Universidad de Gotinga estudió bajo la direccion de Kästner i descubrió gran número de propiedades de la teoría de los números; en 1799, dió tres pruebas distintas de que toda ecuacion aljebraica tiene una raiz compleja $a+bi$; en 1801, dió a luz su *Disquisitiones Arithmeticae*, que contiene gran parte de las comunicaciones que Gauss envió a la Academia de Ciencias de Paris, pero no fueron tomadas en cuenta, lo que afectó hondamente al autor. En este mismo año, calculó los elementos del planeta Ceres, descubierto por Piazzi, de Palermo, cálculo que le valió a Gauss el nombre de primero de los astrónomos teóricos. En 1807, rechazó una cátedra en San Petersburgo; mas aceptó el cargo de Director del Observatorio de Gotinga i fué profesor de Astronomía en la Universidad, puesto que conservó hasta su muerte. En sus lecciones, que eran de una lucidez notable, se consagraba a la esposición del análisis, que lo habia conducido a sus variados descubrimientos, aclaraciones que faltan en sus demostraciones escritas. Temiendo distraer la atencion de sus discípulos, no les permitió que tomaran apuntes de sus clases. En 1809, publicó *Theoria Motus Corporum Caelestium*, en la que figura el principio de triangulacion curvilínea; del mismo asunto trata en su memoria *Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxia.* Ocupóse, de 1821 a 1848, como consejero científico de Hanover i Dinamarca, en cuestiones de Jeodesia; i publicó notas relativas a la Jeodesia superior.

Sus investigaciones sobre la electricidad i el magnetismo datan de 1830; tres años mas tarde inventó, en compañía de W. E. Weber, el heliotropo i magnetómetro de dos hilos; siguiendo las ideas de Arago i Humboldt, Gauss i Weber construyeron ademas un observatorio magnético, sin emplear el hierro en sus aparatos; i llegaron a la conclusion de que se podian enviar señales telegráficas de un punto a otro de la tierra, idea que convirtió en realidad el sistema de los electroimanes que empleó Wheatstone, en 1840.

En 1838, publicó dos memorias sobre la teoría jeneral del magnetismo terrestre i sobre las fuerzas atractivas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.

Consideraba los fenómenos electrostáticos como debidos a atracciones i repulsiones de partículas imponderables; Lord Kelvin (1846) demostró que los efectos podian compararse con los producidos por un efluvio de calórico emanando de fuentes de electricidad convenientemente distribuidas. En electrodinámica, Gauss estableció, en 1835, la fórmula

$$ee'r^{-2}\left\{1+\left[\frac{d^2r}{d\,t^2} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^2 e^{-2}\right\}$$

que espresa el valor de la atraccion de partículas electrizadas e, é, colocadas a la distancia *r* una de otra.

Sin embargo, como no pudiera encontrar una representacion física de estas teorías, abandonó mas tarde su estudio.

Varios autores han propuesto hipótesis físicas, como ser Rieman (1858), Neumann (1900), i Betti (1868); pero Helmholtz encontró que todas ellas eran inaceptables. Faraday consideraba los fenómenos eléctricos i magnéticos como tensiones i movimientos de un medio material elástico. Estudió Maxwell esta teoría i dedujo que si este medio era igual al pretendido éter luminífero, la velocidad de la luz seria igual a la razon de las unidades electro magnéticas i electrostáticas, lo que parecen confirmar los ulteriores esperimentos. El campo de investigaciones de Gauss fué mui estenso y ha de ser considerado, entre los grandes jeómetras, como el último que poseyó conocimientos universales.

Despues se han desenvuelto de tal modo las ciencias esactas, que los matemáticos han tenido que especializarse en cada una de sus numerosas ramas, para conseguir con sus estudios mejora i progreso en las doctrinas de estas ciencias.

La obra matemática teórica de Gauss se encuentra principalmente en su *Disquisitiones Arithmeticae* que trata de la teoría de los números. Aunque desarrolló esta cuestion como un simple capítulo de áljebra, supo sin embargo distinguir entre las cantidades discontínuas o aritméticas i las contínuas o aljebraicas; e introdujo una notacion nueva i nuevos métodos de análisis que despues fueron aceptados. Divídese la Teoría de los Números en las congruencias i las formas, dos ramas que estudió Gauss con sin igual acierto, dando a conocer la gran lei de la reciprocidad cuadrática, la que demostró de seis maneras diferentes; dió a luz la teoría moderna de las congruencias de primero i segundo órden, a la que referia el análisis indeterminado; resolvió las ecuaciones binomias $X^n+1=0$ i descubrió su célebre teorema sobre la posibilidad de construir polígonos regulares de $2^m(2n+1)$ lados, siendo m i n enteros i $2n+1$ primo (1796); desarrolló la teoría de las formas cuadráticas ternarias con dos indeterminadas; i sus trabajos sobre los determinantes sirvieron mas tarde de base a los estudios de Jacobi. Las funciones Theta, que tan grande importancia tienen en la teoría de las funciones de periodicidad doble, fueron descubiertas por Gauss, descubrimiento que mas tarde hicieron ademas Abel i Jacobi. En la teoría de los resíduos bicuadráticos emplea la nocion de números complejos de la forma $a+bi$; en otras memorias demuestra que toda ecuacion aljebraica tiene una raiz real o imajinaria i trata de la suma de series i de la interpelacion.

Las investigaciones que hizo sobre las series hiperjeométricas presentan un grande interes; contienen una discusion de la funcion Gamma, que ademas estudiaron Kummer i Riemann. Poseemos tambien sus teoremas sobre la curvatura de las superficies i una memoria sobre la representacion conforme. Parece que Gauss descubrió algunas propiedades de los cuaterniones o cuaternios. En sus estudios astronómicos, llaman la atención sus notas acerca de la atraccion de los elipsoides homojéneos i una memoria (1839) que trata de las fuerzas atractivas segun la inversa del cuadrado de la distancia.

Los grandes maestros del análisis moderno son Lagrange, Laplace i Gauss. El primero, Lagrange, se distingue por la perfeccion que tienen la forma i el fondo de sus producciones, por la lucidez de sus pensamientos i por el esmero que pone en dar a conocer el camino que ha recorrido en sus investigaciones.

Por el contrario, Laplace no esplica nada: una vez seguro de la esactitud de los resultados encontrados, se contenta con presentarlos por lo jeneral sin demostracion i a veces demostrados de un modo incompleto. Por lo que a Gauss respecta, es tan correcto i tan elegante como Lagrange; mas, para poder seguirlo en sus demostraciones, hai que hacer un esfuerzo mayor que el exijido por Laplace en sus escritos, si bien es cierto que las demostraciones del matemático aleman son verdaderas i rigurosas, pero demasiado sintéticas i concisas.

Pedro Gustavo Lejeune *Dirichlet* (1805-1859) nació en Duren, fué discípulo de Gauss i su sucesor en la Universidad de Gotinga, como profesor de Matemáticas superiores (1855). Interpretó admirablemente la obra de Jacobi, aclaró los puntos mas oscuros de las producciones de Gauss; i, en cuanto a sus investigaciones orijinales, cabe mencionar la demostracion del teorema de Fourier i las leyes asintóticas en la teoría de los números, es decir, las leyes cuya esactitud es tanto mas grande cuanto mas grandes son los números a que se aplican.

TEORIA DE LOS NUMEROS

La Aritmética Superior, despùes de los trabajos de Legendre i Gauss, fué estudiada por Jacobi, que demostró la lei de reciprocidad cúbica, discutió la teoría de los resíduos i publicó una tabla de resíduos de las raices primitivas.

Dirichlet demostró que la célebre ecuacion de Fermat, $x^n+y^n=z^n$ no se podia resolver cuando es $n=5$. Mas tarde, Lamé demostró que tampoco se resolvia si $n=7$.

Dirichlet dió un valor aproximado del número de primos existentes entre límites dados; cuestion que trató Riemann en forma mui completa i que en los últimos tiempos, Poincaré, Sylvester i Hadamard, han completado mas todavía. En 1877, la British Association emprendió la construccion de tablas de los números primos. Burkhardt habia construido las tablas correspondientes a los tres primeros millones; despues Glaisher prosiguió este trabajo hasta el 6.º millon i posteriormente Dase ha llegado al 9.º millon.

Fernando Gotthold *Eisenstein* (1823-1852), profesor de la Universidad de Berlin, contribuyó al mayor desenvolvimiento de la teoría de los números; jeneralizó la representacion de los números por medio de las formas cuadráticas binarias que imajinara Gauss; ocupóse en el teorema relativo a la posibilidad de representar un número por una suma de cuadrados i demostró que el teorema jeneral estaba limitado a ocho cuadrados.

Enrique Juan Estéban *Smith* (1826-1883), natural de Lóndres i profesor en la Universidad de Oxford, se distinguió, como Matemático orijinal i de poderosa creacion, en la escuela que prosiguió los estudios de Gauss. En 1861, publicó una memoria relativa a las ecuaciones indeterminadas de primer grado i a las congruencias; i en 1867, otro estudio sobre los órdenes i jéneros de las formas cuadráticas ternarias. Estas dos producciones, que aparecieron en las *Philosophical Transactions*, esplican, completan i jeneralizan los variados trabajos que al respecto hiciera Eisenstein. En 1883, la Academia de Ciencias de Paris discernió el Gran Premio de Ciencias Matemáticas a un trabajo de Smith sobre los teoremas de Eisenstein, trabajo que habia propuesto la misma Academia. La Academia de Ciencias de Berlin tambien distinguió una de sus producciones con el premio Steiner. Ademas de muchos trabajos dignos de ser conocidos, conviene mencionar especialmente las investigaciones sobre la teoría de los números que lo condujeron a la teoría de las funciones elípticas.

Ernesto Eduardo *Kummer* (1810-1893), profesor de la Universidad de Berlin, estudió los números complejos de la forma

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + \ldots ,$$

en la que a son números reales i A son raices de $x^n - 1 = 0$. No se aplica a estos números la teoría del máximo divisor comun; i sus factores primos deben tener definición propia, lo que condujo a Kummer a crear los números ideales.

Julio Guillermo *Dedekind* (1831), en la segunda edicion de la obra de Dirichlet sobre la teoría de los números, ha dado una nueva teoría de los números complejos, i completa los resultados de Kummer sin hacer uso de los números ideales.

Leopoldo *Kroneker* (1823-1891), discípulo del anterior, estudió principalmente las ecuaciones aljebraicas.

Pablo *Bachmann* (1837), ha publicado la obra mas estensa que se conoce sobre la teoría de los números.

La distribucion de los números primos ha sido estudiada por Riemann, Sylvester, Tchebycheff (1821-1894); la particion de los números, tratada anteriormente por Euler, forma parte de los trabajos de Cayley, Sylvester i Mac-Mahon. *Liouville* (1809-1882) i Glaisher se han aplicado especialmente a la representacion de los números por medio de formas especiales, i a los divisores de los números de formas determinadas; Kummer concibió los números ideales, i Dedekind, editor de las obras de Dirichlet, prosiguió estos trabajos; Cauchy, Kronecker i *Hermite* (1882-1901), estudiaron las formas cuadráticas binarias. Por último, las obras clásicas mas conocidas que tratan de la teoría de los números son las de G. B. Mathews, (Cambridge, 1892); de Eduardo Lucas, (Paris, 1891), i de E. Cahen, (Paris, 1900).

TEORIA DE LAS FUNCIONES DE PERIODICIDAD DOBLE

Las funciones Theta, descubiertas en 1808 por Gauss, han sido el oríjen de las funciones de periodicidad doble, i fueron el objeto de los trabajos de los matemáticos en la segunda mitad del siglo XIX, despues de las investigaciones de Abel i Jacobi.

Nicolas Enrique *Abel* nació en Findor, Noruega, el 5 de Agosto de 1802 i murió en Froland el 6 de Abril de 1829, a los 26 años de edad. En 1815 entró a la escuela de Cristianía i aquí tuvo de profesor a Holmoe, quien conoció las disposiciones especialísimas de alumno tan distinguido.

Enseñóle rápidamente las obras de Euler sobre el cálculo infinitesimal i lo inició en el método de Lagrange para progresar en el estudio i que consiste en «leer una sola obra a la vez; leerla primeramente toda entera sin detenerse en la dificultades i despues volver sobre estos puntos difíciles ayudándose con otras obras». Despues de haberse iniciado en los testos de Lacroix, Francoeur, Poisson, Gauss, Garnier i principalmente Lagrange, entró a la Universidad, costeada su educacion por sus profesores.

En 1826 tuvo la idea de la inversion de la integral elíptica.

Históricamente considerada la cuestion, la Era de las Matemáticas modernas se abre con la teoría de las funciones elípticas. Los analistas conocieron que la integral elíptica de primera especie:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (1)$$

no se puede espresar por medio de funciones elementales; i, por tanto, es una funcion trascendente nueva, jeneralizacion del *arco seno* que corresponde a $K = o$ i a la que se refieren los radicales polimonios de cuarto grado:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}}$$

Los primeros trabajos son de Euler, Landen i Lagrange; pero a Legendre le corresponde el mérito de haber adivinado en este estudio el jérmen de una rama importante del análisis, i despues de cuarenta años de estudios, dió a luz las principales propiedades de las integrales elípticas, en forma complicada i fragmentaria i tál como si se estudiaran las funciones trigonométricas partiendo de la funcion inversa

$$\text{arc sen } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Para que fuera completa la teoría jeneral de las funciones elípticas era menester que se hiciera aparecer la funcion inversa, así como el seno es la inversa analítica de arco seno; lo que consiguió Abel introduciendo en (1) los valores imajinarios de u. La nueva funcion se designó por *s* n u, signo imajinado por Gudermann. Gracias a un teorema de descomposicion formulado por Euler, Abel descubrió que s n u es una funcion *doblemente periódica* respecto de u; de igual manera sen *u* es una funcion simplemente periódica de u, siendo 2π el período. La misma propiedad de doble periodicidad pertenece a las otras dos funciones elípticas

$$c\,n\,u=\sqrt{1-s\,n^2\,u},\quad d\,n\,u=\sqrt{1-k^2\,s\,n^2\,u.}$$

Las primeras memorias de Abel concernientes a esta teoría aparecieron en el *Journal de Crelle*, célebre periódico que tuvo por fundadores a Crelle i al mismo Abel, i fueron tratadas desde el punto de vista de la teoría de las ecuaciones i de las formas aljebraicas. El teorema de Abel, que despues aplicó Riemann a las funciones transcendentes, fué enviado a la Academia de Ciencias de Paris en 1826, pero no se publicó sino en 1841. En esta memoria Abel introduce las diferenciales aljebraicas mas jenerales i a las que Jacobi denominó *abelianas*. Para hacer intelejible el teorema de Abel hai que entrar en detalles que no pueden tener cabida en estas líneas; nos bastará decir que mediante su conocimiento se puede determinar la suma de cierto número de integrales que tienen el mismo integrante, aunque diferentes límites. Los cultivadores de esta nueva rama de las Matemáticas han sido: Neumann, Klein, Pick, Burckhardt, Ritter, Nother, Prym, Weber, Frobenius, Schottky, Weierstrass, Picard, Poincaré, i Hermite. Abel criticó el empleo de las series diverjentes i descubrió el teorema que da el criterio de la validez del producto de dos series infinitas.

Es conocida su célebre demostracion sobre la imposibilidad de espresar la raiz de la ecuacion jeneral de quinto grado en funcion de los coeficientes i por medio de un número limitado de radicales i de funciones racionales; teorema que ya habia sido enunciado en 1798 por el médico italiano Paolo Ruffini. La vida de Abel fué corta i llena de dificultades materiales.

Carlos Gustavo Jacobo *Jacobi*, (1804-1851), nació en Postdam; era de oríjen israelita e hizo sus estudios en la Universidad de Berlin, en la que se graduó de doctor en filosofía

(1825). En 1829 enseñó en Berlin las Matemáticas i es considerado como el profesor mas famoso de su jeneracion. Con entera independencia de los trabajos de Abel, estableció la teoría de las funciones elípticas (1829). Ademas, estudió de un modo especial la funcion Theta, de que ya hemos hablado; designó por sin am u (seno amplitud) la primera funcion elíptica, designacion que Gudermann cambió por sn; espresó sn, cn, dn, en la forma de cuocientes de series o de productos infinitos; creó la teoría de las funciones θs que son series esponenciales i que tienen particular importancia en la teoría de las funciones elípticas; estudió con profundidad los determinantes, inventó el Jacobiano, determinante funcional de n^2 coeficientes diferenciales parciales de primer grado, de n funciones con n variables independientes; dió gran desarrollo a las trascendentes abelianas, a la teoría de los números, a las ecuaciones diferenciales, al cálculo de las variaciones, al problema de los tres cuerpos i a otras cuestiones de Dinámica.

Jorje Federico Bernardo *Riemann* (1826-1866), nació en Breselenz i fué condíscipulo de Gauss, Jacobi, Dirichlet, Steiner i Eisenstein. Luchó contra la pobreza i las enfermedades para poder terminar sus estudios; en 1857 fué nombrado profesor en Gotinga; se le reconoció su talento; mas, desde 1862 su salud comenzó a decaer i cuatro años despues murió a los cuarenta años de edad.

Riemann debe ser considerado como el matemático mas profundo i mas brillante de su tiempo; i aunque produjo poco, su orijinalidad i su jenio son manifiestos. En 1850 se ocupó en las funciones aljebraicas de una variable compleja i dió oríjen a su nuevo método para tratar las funciones. En 1854, escribió su célebre memoria sobre las hipótesis, que sirven de fundamentos a la Jeometría. Ya vimos que el problema fundamental de las funciones elípticas es el de la inversion, de la que hablamos al mencionar los trabajos de Abel.

Habia que definir, de una manera jeneral, las diferenciales aljebraicas propias para reemplazar en las ecuaciones de inversion a las diferenciales elípticas o hiperelípticas estudiadas por Abel. Esta fué obra de Riemann.

Representó la variable imajinaria sobre un plano compuesto de tantas hojas sobrepuestas cuantos valores distintos tenia la funcion; soldó estas hojas a lo largo de ciertas secciones determinadas por los puntos críticos de la funcion, pasando de una hoja a la otra segun leyes bien definidas; mediante este trabajo, Riemann logró hacer uniformes la funcion i las integrales abelianas de ella dependientes. Este trabajo fué simplificado por Lünoth, Clebsch i Clifford, transformando el conjunto de hojas en una superficie cribada.

A las ideas de Riemann sobre las funciones analíticas se liga el problema de la *representacion conforme*, que consiste en encontrar una funcion uniforme Z=f (z) tal que a un punto del plano de la variable z situado en una área dada, corresponda un punto del plano Z situado tambien en una área dada e inversamente. Este problema, estudiado primeramente por Riemann, ha sido resuelto por Schwarz para áreas limitadas por un solo contorno i por Schottyk para las áreas limitadas por varios contornos.

Funciones elípticas i abelianas.—Esta rama de las Matemáticas, ademas de Legendre, Gauss, Abel, Jacobi i Riemann, ha sido estudiada por J. U. *Rosenhain* (1816-1887), de Koenisgsberg, que escribió sobre la funcion hiperelíptica (1884) i las funciones de dos variables con cuatro períodos; A. *Gopel* (1812-1847), de Berlin, que discutió las funciones hiperelípticas; L. *Kronecker* (1823-1891), de la misma capital, que trató de las funciones elípticas; L. *Konigsberger*, de Heidelberg que discutió la trasformacion de la funcion doble theta; F. *Brioschi* (1824-1897), de Roma, estudió las funciones elípticas e hiperelípticas; H. Smith, A. Cayley, C. Hermite, etc.

Gabriel *Lamé* (1795-1870). Desprovisto de fortuna, tuvo que luchar con todo jénero de dificultades para proseguir sus estudios. Consiguió, sin embargo, entrar a la Escuela Politécnica; obtuvo el título de injeniero de minas i entró al servicio del Zar de Rusia, en compañía de Clapeyron. Despues volvió a Francia i fué profesor en la Escuela Politécnica i en la Sorbona. Se dedicó de preferencia a la Física Matemática; i fué autor de un trabajo notable sobre la ecuacion de Fermat i de otro sobre una ecuacion diferencial estudiada despues por Brioschi i Hermite.

Cárlos *Weierstrass* (1815-1897), natural de Westfalia, es considerado como uno de los mas grandes matemáticos del siglo XIX. Su nombre es inseparable del progreso i estension que han tenido en este siglo las funciones elípticas i abelianas, i la teoría de las funciones. Sus primeras investigaciones se encaminaron a profundizar las funciones Theta que pudo espresar segun las potencias del módulo; i últimamente encontró un método que permite tratar todas las funciones elípticas de una manera simétrica, lo que consiguió despues de un profundo estudio de la teoría de las funciones. A las funciones sn, cn, dn, theta de Abel i Jacobi, Weierstrass ha substituido otros elementos elípticos, a saber: las funciones p, zeta i sigma que simplifican las fórmulas i aplicaciones. Despues de trabajos tan notables, las funciones elípticas son las funciones de dos períodos i de una sola variable, i su teoría es tan completa i acabada como la de las funciones circulares.

Weierstrass contruyó una teoría de las funciones analíticas uniformes; llamó su atencion la representacion de las funciones por productos infinitos i por series; escribió ademas sobre la naturaleza de las hipótesis hechas respecto del cálculo de las variaciones i superficies mínimas. Preocupóse toda su vida de las funciones abelianas; aplicó a estas trascendentes i a las funciones hiperelípticas las propiedades conocidas *sn*, *cn*, i *dn*. Despues de la primera memoria de Riemann, estas últimas funciones cedieron su lugar a las abelianas enjendradas por las curvas aljebraicas más jenerales; i Weierstrass se propuso investigar las funciones periódicas mas jenerales.

Jacobi habia demostrado que una funcion de n variables puede tener 2 n períodos; Weierstrass encontró a su vez que estas funciones gozan de las mismas propiedades que las trascendentes elípticas. Empero, el descubrimiento capital de Weierstrass es el de los *factores primarios*, que se presentan en la siguiente teoría. Las trascendentes mas sencillas son las funciones enteras que no tienen punto singular sino en el infinito, i son siempre productos de dichos factores, compuestos al mismo tiempo del producto de un polinomio de primer grado por una esponencial cuya esponente es un polinomio de grado: $g_{cú}$;$g_{cú}$ es llamado jénero del factor primario. A este descubrimiento está ligada la clasificacion en jéneros de las funciones enteras, cuya importancia aritmética ha puesto en evidencia Mr. Hadamard. En esta nocion de factores primarios Weierstrass encontró ademas el medio de representar toda funcion meromorfa por un cuociente de funciones enteras. Las funciones meromorfas son las que tienen singularidades simplemente polares. Con esta serie de descubrimientos tan importantes, se abrió a los jeómetras un dominio en el vastísimo campo de las ciencias esactas.

Runge i Mittag Lefler, mediante estos nuevos recursos, pueden representar las funciones uniformes por series de elementos simples; Picard se encuentra en condiciones de mostrar que una funcion entera es susceptible de poseer todos los valores finitos, salvo uno tal vez; Poincaré, sin dificultad, hace ver que si y es una funcion analítica *no uniforme* de x, siempre es posible espresar x é y en funcion uniforme de una variable z, refiriendo de este modo el estudio de las funciones no uniformes, a las de las funciones uniformes; Apell i Goursat tratan las funciones de espacios vacíos; Painlevé, las líneas singulares de las funciones analíticas; Borel i Hadamard encuentran importantes propiedades de las series de potencias. Por último, Weierstrass es el primero que dió el ejemplo de una funcion contínua sin derivada, a la que corresponde una curva en que la tanjente en un punto cualquiera es indeterminada....., sorprendente ejemplo del rigor que queria ver en todo, con su inflexible lôjica.

Entre los continuadores i émulos de Weierstrass citaremos los siguientes matemáticos: G. H. *Halphen* (1844-1889) ;F. C. *Klein*, de Gotinga; H. A. Schwarz, de Berlin; H. *Weber*, de Estrasburgo; M. *Nother*, de Erlanger; W. *Stahl*, de Aquisgran; F. G. *Frobenius*, de Berlin, i J. W. L. *Glaisher*, de Cambridge.

En cuanto a las obras mas esparcidas en nuestros dias son las de J. Tannery i J. Molk, 4 volúmenes, (Paris, 1893-1901); de P. E. Appell i E. Lacour, (Paris, 1896); de H. Weber, (Brunswick 1891); i de G. H. Halphen, 3 volúmenes, (Paris, 1886-1891).

La teoría de las funciones.—Hemos dicho que la teoría moderna de las funciones es debida, en una gran parte, a Weierstrass: Es un asunto que posee un atractivo singular i que promete ser una rama vasta i fecunda de la ciencia matemática. Por lo que a la historia respecta, esta teoría debe su existencia a Cauchy, con su teoría de las funciones sinécticas de una variable compleja. Sus investigaciones las prosiguió J. *Liouville*, que dió a conocer las funciones doblemente periódicas; A. *Briot*, J. C. *Bouquet* (1819-1885), i C. *Hermite* (1882-1901) le dieron un mayor desenvolvimiento.

Las investigaciones sobre la teoría de las funciones aljebraicas tienen su oríjen en una nota de Riemann (1850); H. A. Schwarz, de Berlin, completó este trabajo, estableciéndolo sobre bases irrefutables; F. C. *Klein*, de Gotinga, relacionó la teoría de las funciones de Riemann a la de los grupos i se ocupó en las funciones automorfas i modulares; Poincaré, de Paris, estudió las mismas funciones; A. Painlevé escribió sobre las funciones uniformes i K. H. Hensel, de Berlin, sobre las funciones aljebraicas. *Mittag-Lefler*, de Estocolmo, uno de los mas distinguidos matemáticos contemporáneos, ha hecho mas estensa la teoría de las funciones analíticas de Weierstrass. A este respecto recomendamos las obras de *Forsyth*, *Teoría de funciones de una variable compleja* (Cambridge, 1900); de Petersen, *Teoría de las funciones*, (Copenhague, 1898); de Appell i de Goursat, Las funciones aljebraicas (Paris, 1895), etc.

Aljebra Superior.—La teoría de los números puede considerarse como una aritmética superior; i la de las funciones elípticas i abelianas, como una trigonometría superior. Los conocimientos pertenecientes al Aljebra Superior, comprendiendo la resolucion de las ecuaciones, fueron los estudios predilectos de los matemáticos de quienes vamos a hablar en seguida.

Agustin Luis *Cauchy* nació en Paris el 21 de Agosto de 1789 i murió en Sceaux el 25 de Mayo de 1857. Dotado de un espíritu universal, fué iniciado por su padre en todos los conocimientos humanos; i, en el ramo del Análisis, llegó a ser el principal representante de la Escuela Francesa en el siglo XIX. Entró en la Escuela Politécnica, obtuvo el título de injeniero de puentes i calzadas, i, en 1811, produjo su primer trabajo que versa sobre los poliedros. Las memorias que siguieron a este estudio mostraron la estension de su saber; en una de ellas jeneraliza algunos de los resultados que establecieron Gauss i Legendre; en otra da a conocer un teorema sobre el número de valores que puede admitir un funcion aljebraica cuando se cambian en ella las constantes literales; lo que a Abel condujo a establecer que no se pueden resolver las ecuaciones aljebraicas superiores al cuarto grado. Cauchy, despues de Gauss, hizo un estudio científico de las series i estableció la manera de reconocer su converjencia; trabajo que Bertrand completó mas aun, construyendo series converjentes o diverjentes, a las que refirió la serie estudiada. Con relacion a la restriccion que hace Cauchy del empleo de las series, se cuenta que Laplace, despues de leer la primera memoria, se impresionó de tal modo que se encerró en su pieza i no permitió la entrada a nadie sino despues de haberse asegurado de que todas las series empleadas en su *Mecánica Celeste* eran converjentes.

Los trabajos de Euler a este respecto carecian del rigor necesario i a Cauchy se le debe haber establecido sobre bases sólidas los principios de la converjencia de las series. En las postrimerías del siglo XIX dos jeómetras franceses, Borel i

Servant, han resuelto el problema de sumar series diverjentes. En 1816, Cauchy tomó posesion en la Academia de Ciencias de Paris del sillon que ocupara Monge, espulsado a raiz de la Restauracion; i ademas fué nombrado profesor de la Escuela Politécnica.

Sus lecciones sobre el análisis aljebraico, el cálculo infinitesimal i la teoría de las curvas fueron clásicas; en 1830 tuvo que abandonar su patria i se retiró a Turin i de aquí a Praga, donde se consagró a la educacion científica del Conde de Chambord, nieto de Cárlos X i presunto heredero de la corona de Francia; volvió a su patria en 1837; i en 1851 Napoleon III le permitió residir en el pais sin exijirle el juramento de fidelidad.

Su actividad era prodijiosa i, desde 1830 hasta 1859, publicó en las Actas de la Academia de Ciencias de Paris mas de 600 memorias orijinales i unos 150 informes; todos estos escritos versan sobre las mas variadas materias i son de un valor mui desigual. Entre sus investigaciones mas importantes hai que mencionar sus trabajos sobre la converjencia de las series, la determinacion del número de raices reales e imajinarias de una ecuacion aljebraica cualquiera; encontró un método para el cálculo aproximado de las raices de una ecuacion; i dió una teoría de las funciones simétricas i de las raices de las ecuaciones de cualquier grado; avaluó *a priori* una cantidad menor que la menor diferencia entre las raices de una ecuacion; estudió los determinantes, jeneralizó su uso i profundizó la teoría de los números; perfeccionó la teoría de las integrales definidas, inventó el cálculo de los resíduos; por medio de un medio analítico directo determinó las desigualdades planetarias de larga duracion; i escribió diversas memorias sobre las ondas, la cantidad de luz reflejada por la superficies metálicas i sobre otros puntos relativos a la óptica.

Antes de Cauchy, las imajinarias habian sido empleadas en análisis, pero no en la forma como hoi se hace. El gran analista frances comenzó por definir una funcion de variable imajinaria $z=x+iy$, en la que es $i=\sqrt{-1}$. Se dice que

P (x, y)+i Q (x, y) es funcion de z=x+iz, cuando admite una derivada de z, para la cual es menester que sea

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy} \text{ y } \frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx};$$

las dos funciones P, Q de las variables reales x, i verifican ademas la ecuacion de Laplace.

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0;$$

i estas funciones se llaman harmónicas.

Tales ideas, apénas bosquejadas por Cauchy, serán tratadas con sin igual lucidez por Riemann. La integral de una funcion de variable imajinaria no está determinada, como lo está la de una funcion de variable real, cuando se dan el valor inicial i final de la variable z. Hai que dar ademas los valores que toma z o los que toman x, y entre aquellos valores iniciales i finales. Jeométricamente, representando la variable $z=x+iy$ sobre un plano por medio de las coordenadas x,y, si a i b corresponden a los límites, la integral debe depender de la línea de integracion que sigue el punto z entre a i b: El teorema fundamental de Cauchy espresa, que, en jeneral, dicha integral no depende de tal línea. En jeneral, para dos caminos cualesquiera que unen los puntos a i b, la integral tiene el mismo valor, salvo el caso de comprender un *punto crítico* de la funcion, en que es infinita, indeterminada i de valores múltiples a simétricos; distincion que hizo primeramente Puisseux, que completó Cauchy en una serie de memorias publicadas de 1825 a 1851 i que contienen diversas proposiciones que forman la base de la ciencia matemática. Entre estas, la mas importante es la siguiente: una *funcion análitica* o de una variable imajinaria se puede derarrollar en serie ordenada segun las potencias crecientes de z—a i que converje cuando z queda dentro de un circuito de centro a, punto que no es crítico, i por radio la distancia de este punto al punto mas cercano; es la estension al dominio imajinario de la serie clásica de Taylor.

Sobre la circunferencia del círculo de converjencia, definido de este modo, existe a lo ménos un punto crítico *a* en que la funcion deja de ser analítica. Tomemos un punto *b* del círculo de converjencia; podremos partir de este punto, i desarrollar la funcion en serie segun las potencias de z—b i dentro de un círculo de centro *b* i de radio ba; se concibe que ciertos puntos de este segundo círculo serán esteriores al primero i que el segundo desarrollo valdrá para puntos i valores de z, que no valen para el primero. En este caso se dice que se ha *prolongado* la funcion analítica fuera del primer círculo.

Weierstrass i Mr. Méray llegaron a resultados mui importantes relativos al mismo asunto, i establecieron que no siempre los círculos se pueden estender indefinidamente en todo el plano; de modo que una serie de círculos que se cortan mútuamente definen cierta área, cuya *frontera*, esto es, la curva envolvente de las circunferencias estremas, limita el dominio de existencia de la funcion. En este dominio pueden existir puntos singulares aislados que son *polos* si alrededor de estos puntos *a* la funcion es de la forma:

$$\frac{Am}{(z\text{-}a)^m} + \frac{Am-1}{(z\text{-}a)^{m}\text{-}1} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{z\text{-}a} + \ldots.$$

serie indefinida en z—a i de puntos esenciales, si, en el desarrollo precedente, *m* es infinito. La frontera contiene un conjunto de puntos singulares ademas de los polos. Miéntras que Weierstrass escluye de su investigacion las fronteras, los señores Hadamard, Painlevé i Borel las estudian; i aun los dos últimos pasan mas allá; i en los espacios vacíos, o áreas cuyos puntos todos son singulares segun Weierstrass, Painlevé i Borel definen una prolongacion de la funcion.

De estos notables estudios ha nacido la importancia estrema que tiene la serie de Taylor en los trabajos de Cauchy i de sus continuadores en el desenvolvimiento i progreso del Análisis moderno. Otro punto de vista nuevo que se debe tambien a Cauchy, se refiere a que entre dos puntos dados, la integral de una funcion analítica de puntos críticos situada entre los dos caminos, adquiere valores que difieren entre sí ciertas cantidades constantes, llamadas *períodos* de la integral i que no dependen de la posicion de los dos puntos primitivos; en consecuencia, la funcion inversa de la integral es periódica. Es así como ha podido esplicarse que las funciones circulares i elípticas son periódicas i que las funciones abelianas presentan ciertas particularidades.

De estos i otros principios han salido el cálculo de los resíduos, la determinacion del número de raices situadas en el interior de un contorno, estendida por Kroneker, i Picard al caso de muchas variables, la investigacion del valor de las integrales definidas, etc.

Igualmente se deben a Cauchy los teoremas mui jenerales concernientes a la existencia de las soluciones de una ecuacion diferencial, dada.

De la relacion:

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

¿se puede deducir la funcion $y = f(x)$?

En el siglo XVIII los jeómetras habian integrado un gran número de ecuaciones diferenciales. Cauchy cortó la cuestion i, debido a su influencia, hoi se comienza por establecer teoremas de existencia, es decir, condiciones a que satisfacen para que se pueda obtener una verdadera funcion. Despues de Cauchy, estas cuestiones han sido estudiadas por Lipschitz, Picard, Briot i Bouquet, Poincaré, Bendixon, Horn, i Painlevé. Este último ha sabido determinar todas las ecuaciones de 2.º órden con puntos críticos fijos, independientes de las constantes arbitrarias; emprendió despues la misma investigacion sobre las ecuaciones de tercer órden y de este modo ha sido conducido al descubrimiento de nuevas trascendentes.

Mas adelante, al hablar de Evaristo Galois, trataremos de la teoría de los *grupos*, que Sophus Lie ha relacionado estrechamente con las ecuaciones diferenciales; H. Poincaré estudia los grupos discontínuos o fucsianas, jeneralizacion de las funciones elípticas, descubrimiento capital de todas las ramas del Análisis.

Gauchy i Jacobi estudiaron las ecuaciones diferenciales de un órden cualquiera de diferenciacion; i el primero estableció al respecto un teorema que se hace estensivo a n variables.

La ecuacion $\frac{d^2 u}{d x d y} = o$ que admite por integral la funcion $u = F(x) + G(y)$, en que F i G son arbitrarias, hace ver cuán indeterminado es el valor de una integral.

Juan Roberto *Argand* (1768-1822), natural de Jinebra, en 1806, con anterioridad a Gauss i Cauchy, dió la representacion jeométrica de un número imajinario, i mediante ella demostró que toda ecuacion aljebraica tiene una raiz. En cuanto al significado jeométrico del valor imajinario $\sqrt{-1}$, parece que C. Wessel fué el primero que lo interpretó como un jiro de 90º, segun aparece en una memoria presentada a la Academia de Ciencias de Copenhague en Marzo de 1797.

Adolfo *Gopel* (1812), orijinario de Sajonia, publicó una memoria sobre las ecuaciones indeterminadas de 2.º grado i resolvió el siguiente problema: dar una espresion de las funciones inversas de las integrales abelianas de primera especie, problema que resolvió, de un modo mas sencillo, Rosenhain.

Sir William Rowan *Hamilton* (1805-1865) nació en Dublin, i es el célebre autor de la teoría de los *cuaterniones* o cüaternios que, a juicio de muchos, será considerada como uno de los mas grandes descubrimientos del siglo XIX.

A la edad de 7 años podia leer con facilidad el latin, el griego, el frances i el aleman; a los 13 años poseia 13 idiomas i tuvo ocasion de leer la *Aritmética Universal* de Sir Isaac Newton i luego estudió la jeometría analítica i el cálculo infinitesimal, los *Principios* del mismo Newton i la *Mecánica Celeste* de Laplace; en el cuarto volúmen de esta obra inmortal encontró i dió a conocer un error, llamando por esta razon la atencion del mundo sabio sobre su precoz intelijencia (1823). Siendo estudiante en la Universidad de Dublin, fué designado por aclamacion profesor de Astronomía, cuando apénas contaba con veintidos años de edad. En 1823 habia escrito ya su primera memoria, *Teoría de sistemas de rayos;* i en uno de sus suplementos dió a conocer el fenómeno de la refraccion cónica; otra memoria (1827) trata de la *Accion variable;* y años despues (1834-1835) publicó su *Método Jeneral en Dinámica*, en la que estudia esta parte de la Mecánica como una rama de las Matemáticas puras. En 1852 se publicaron sus lecciones sobre los *Cuaternios*, habiendo descubierto con anterioridad Gauss alguna de sus propiedades El ilustre inventor de los cuaternios, que son el cuociente de dos vectores i que se compone de cuatro términos

$$w + i x + j y + k z,$$

estudió tambien la solucion de la ecuacion jeneral aljebraica de quinto grado, que confirmaba la conclusion de Abel de que las raices no pueden espresarse por medio de un número finito de cantidades puramente aljebraicas; publicó ademas una nota sobre las funciones, un trabajo referente al hodógrafo i una memoria relativa a las soluciones númericas de las ecuaciones diferenciales. Por lo que respecta a sus *Elementos de Cuaternios*, se ha dicho que los métodos de análisis que ahí se esponen, presentan sobre los procedimientos de jeometría analítica un perfeccionamiento tan grande como estos últimos sobre la jeometría euclidiana.

Pedro Alfonso *Laurent* (1813-1854) completó sus estudios en la Escuela Politécnica; fué injeniero militar, pero no formó parte de ninguna sociedad ni fué pródigo en sus escritos científicos. Sin embargo, se le debe una teoría importante sobre la variacion de las integrales múltiples i el teorema de su nombre referente al desarrollo de las funciones.

Antonio Augusto *Cournot* (1801-1877) estudió los principios del Cálculo de las Probabilidades i del Cálculo Infinitesimal. Despues de la definicion satisfactoria de número inconmensurable que diera Kronecker, en que el análisis matemático ha sido considerado por el lado aritmético, las dificultades que se encontraban para darle al Cálculo Infinitesimal una base lójica han desaparecido. Para justificar de un modo completo esta doctrina tan profunda, habria aun que saber si los cálculos diferencial e integral se pueden aplicar lejítimamente o los fenómenos naturales.

German Günther *Grassmann* (1809-1877) era natural de Stetin, fué profesor en su ciudad natal i en 1844 dió a luz sus investigaciones sobre el áljebra no conmutativa. Parece que Grassmann concibió los cuaternios al mismo tiempo que Hamilton; Boole i De Morgan prosiguieron estos estudios, lo mismo que H. Hánkel i A. Cantor, en sus obras sobre las complejas i las magnitudes irracionales.

Jorge *Boole* (1815-1864) imajinó, independientemente de Grassmann, un sistema de áljebra no conmutativa i publicó diversas memorias sobre las trasformaciones lineales.

Evaristo *Galois* nació en Paris el 26 de Octubre de 1811 i murió en un desafío, a los 20 años, el 30 de Mayo de 1830. Es uno de los matemáticos mas orijinales del siglo XIX i el creador de la teoría aljebraica de los grupos de sustituciones, teoría cultivada por Cauchy, Serret i Jordan, de Paris; Netto, Frobenius i Klein de Alemania; i Burnside, de Cambridge.

La teoría de las ecuaciones, en el siglo XIX, ha hecho progresos decisivos. Primeramente el teorema de Sturm que permite calcular el número de raices reales que una ecuacion aljebraica tiene entre dos límites dados, teorema que esténdido por Cauchy i Laguerre a las raices imajinarias, ofrece aun un campo vastísimo de investigaciones; en seguida la teoría completa de Gauss de las ecuaciones binomias i sus estudios sobre las ecuaciones primitivas i no primitivas, siendo estas últimas de grado mn i pudiéndose descomponerlas en m factores de grado n, mediante la resolucion de una ecuacion de grado m. Por último el descubrimiento de Galois llega al fondo mismo de esta cuestion, tan principal. Galois define así el *grupo* de la ecuacion, cuya importancia reconoce. Llama *racional* toda cantidad que se espresa en funcion racional de los coeficientes de la ecuacion i de cierto número de cantidades arbitrarias relacionadas con dicha ecuacion. Sean, entónces, a, b, c, ... las raices: hai siempre un sistema de permutacion de las letras a, b, c, ...tal que toda funcion invariable numéricamente de las raices por las sustituciones de este grupo sea conocida en múmeros racionales; i, por la recíproca, que toda funcion de las raices, racionalmente determinable, sea invariable por las sustituciones. Agregó, ademas, la nocion de los sub-grupos o invariantes, contenidos en el grupo primitivo. De estas i otras consideraciones Galois desprende i sienta principios que actualmente son la base de la teoría de las ecuaciones i verdaderos fundamentos del Análisis, por cuanto la jeometría proyectiva, las funciones modulares, fuchsianas, elípticas, abelianas i otras mas, presentan en el fondo un grupo por estudiar.

Augusto *De Morgan* (1806-1871) habia nacido en Madras; hizo sus estudios en Cambridge i en 1828 ocupó una cátedra en la Universidad de Lóndres, recientemente creada. Gracias a sus trabajos i a sus alumnos, ejerció una notable influencia sobre los matemáticos ingleses; contribuyó principalmente a la creacion de la Sociedad Matemática de Lóndres i tomó una participacion notable en las actas de la Sociedad Astronómica Real. Estaba al corriente de la filosofía i de la Historia de las Matemáticas; i aunque sus artículos se encuentran mui diseminados entre numerosas revistas, en su mayor parte han sido consultados al escribir esta obra.

Sus memorias sobre los principios fundamentales del áljebra i su tratado de cálculo diferencial (1842) son obras de talento; debemos ademas señalar sus artículos sobre el cálculo de las funciones i la teoría de las probabilidades.

Angelo *Genocchi* (1817-1889), natural de Placencia, principió por recibirse de abogado i fué profesor de derecho en Parma i en su ciudad natal; mas, mui luego abandonó estos estudios para dedicarse a las ciencias esactas; en 1851, publicó un primer estudio sobre la teoría de los números; un año despues, una nota sobre los resíduos cuadráticos. En 1857 ya habia dado a la estampa mas de 40 memorias, i fué nombrado profesor de Aljebra Superior i de Jeometría en la Universidad de Turin. Revelóse verdadero maestro en sus investigaciones acerca de la teoría de los números; no ménos brillantes son sus estudios referentes a las series i al cálculo integral; la teoría de los números complejos, la lei de reciprocidad cuadrática, la resolucion en números enteros de las ecuaciones indeterminadas han sido cuestiones que ha tratado en memorias notables. Aplicóse tambien a la historia de las ciencias de su predileccion, publicando diversos artículos sobre Leonardo de Pisa, la correspondencia de Lagrange i D'Alembert, la historia del Aljebra i los manuscritos de Fermat.

Enrique *Betti* (1823-1892) de Pistoya, principió a darse a conocer por sus trabajos sobre la teoría de las ecuaciones; demostró algunos de los teoremas enunciados por Galois; al mismo tiempo que Hermite i Kronecker, se ocupó en la resolucion de la ecuacion de quinto grado mediante las funciones elípticas. En 1872 dió a la publicidad sus *Lecciones sobre la Elasticidad*, que es una obra de grande importancia.

Arturo *Cayley* (1821-1895) es uno de los mas grandes matemáticos ingleses. Estudió leyes en Cambridge; i, aunque ejerció con éxito la abogacía, como Fermat, en los ratos desocupados que le dejaba el ejercicio diario de su profesion, se dedicaba a las ciencias esactas e hizo entónces sus principales descubrimientos, hasta que en 1863 aceptó una cátedra de Matemáticas en la Universidad de Cambridge. Ademas de sus trabajos relativos a la teoría de los números i a las funciones elípticas, sus investigaciones de Aljebra Superior i Jeometría Analítica son sus mejores títulos de gloria. La concepcion designada con el nombre de *absoluto*, es debida a Cayley; contribuyó estensamente a la teoría jeneral de las curvas i las superficies, fundándose en la estrecha correspondencia que se supone existe entre la jeometría i el áljebra. Tambien se debe a Cayley la teoría de los invariantes o invariables. Escribió mas de 700 memorias de matemáticas puras i de astronomía.

Jacobo José *Sylvester* (1814-1897), como Cayley, de quien fué condiscípulo i su mejor amigo, hizo estudios de leyes i se inscribió en el foro; pero, arrastrado por el gusto de las Matemáticas, dedicóse a ellas i fué profesor de estas ciencias en Woolwich, Baltimore i Oxford. Escribió notas importantes sobre la distribucion de los números primos, i la particion de los números; i se ocupó en el cálculo infinitesimal i las ecuaciones diferenciales. Empero, su estudio favorito fué el Aljebra Superior; citándose entre las numerosas memorias que al respecto escribiera, las que se refieren a las formas canónicas, las contravariantes, las reciprocantes o invariantes diferenciales, i la teoría de las ecuaciones.

Notable es el contraste que presentan los escritos de estos dos grandes analistas ingleses: los de Cayley, son metódicos, precisos, regulares i completos; en tanto que los de Sylvester son vivos, inconclusos, pero no ménos vigorosos ni ménos estimulantes.

Mario Sophus *Lie* (1842-1899) es otro de los grandes analistas del siglo XIX. Hizo sus estudios en Cristianía; i en sus viajes trabó amistad con Klein, Darboux i Jordan, quienes decidieron su carrera. En 1870, descubrió la trasformacion de la esfera en la línea recta, lo que permite estender los teoremas correspondientes de las líneas a los de las esferas; un año despues (1872), fué nombrado profesor en Cristianía; ocupóse en las relaciones que hai entre las ecuaciones diferenciales i las trasformaciones infinitesimales, i esto lo condujo naturalmente a la teoría de los grupos contínuos finitos de sustituciones, i cuyos resultados aparecen publicados en *Theorie der Transformations Gruppen* (Leipzig, 3 vols., 1888-1893). Hácia 1879, Lie aplicó su especial intelijencia a la jeometría diferencial i publicó el resultado de sus investigaciones bajo el título de *Geometrie der Berührungs-Transformationen*. Sus méritos no fueron reconocidos sino mui tarde, lo que apenó los últimos años de su vida.

El Aljebra Superior, comprendiendo la teoría de las formas i la de las ecuaciones, ha sido tratada en sus diversas ramas por los autores siguientes:

La converjencia de las series: J. L. *Raabe* (1801-1859); J. L. F. *Bertrand* (1822-1900); E. C. *Kummer* (1810-1893), U. *Dini*; A. *Pringsheim*; Sir Georges Gabriel *Stokes*.

La teoría de los grupos de sustituciones, ademas de Galois, Cauchy, Serret, Jordan, Séguier, Netto, Frobenius, Klein i Burnside, que ya citamos; mencionaremos a C. W. *Borchardt* (1817-1880), que examinó el rol que desempeñan las funciones jeneratrices en la teoría de las ecuaciones. C. *Hermite* (1822-1901), que estudió la teoría de los co-variantes asociados en las formas binarias, la teoría de las formas ternarias i aplicó las funciones elípticas a la resolucion de la ecuacion de quinto grado; Enrico *Betti* (1823-1892), F. *Brioschi* (1824-1897) i S. H. *Aronhold* (1819-1884), trataron de las formas binarias i las invariantes; R. A. *Gordan* escribió sobre la teoría de las ecuaciones; R. F. A. *Clebsch* (1833-1872) sobre las formas binarias; P. A. *Mac-Mahon* sobre las funciones simétricas; F. C. *Klein*, A. R. *Forsyth*, P. *Painlevé*, D. *Hilbert*, etc. Varias son las obras clásicas que tratan de estas nuevas doctrinas: El Aljebra Superior de G. Salmon, la de Weber, la de J. A. Serret, que es la mas conocida; i un trabajo de Hankel, que es una esposicion histórica de la teoría de una variable compleja.

Víctor *Puiseux* (1820-1883), orijinario de Argenteuil, se hizo notable por una memoria sobre las funciones aljebraicas i fué nombrado profesor en la Sorbona. Dedicóse despues a la Mecánica Celeste i llegó a ser uno de los principales colaboradores de la *Oficina de las Lonjitudes* y del Observatorio. Tuvo la rara delicadeza de retirarse de sus empleos cuando se vió incapaz de poder desempeñarlos debidamente.

Juan Claudio *Bouquet* (1819-1885), del Franco Condado, despues de sus *Observaciones sobre los sistemas de rectas en el espacio*, publicó una nota sobre las superficies ortogonales, que fué el oríjen de los trabajos de Bonnet, Cayley, Darboux i Lévy. En colaboracion con Carlos Briot, Bouquet se propuso poner en órden la obra inmensa de Cauchy, i produjeron un trabajo orijinal concerniente a las funciones de puntos singulares, que desarrollaron despues Fuchs, Poincaré, i Mme. de Kowalewski.

Mas tarde Briot i Bouquet publicaron su *Tratado de las funciones elípticas*, que obtuvo un buen éxito muy merecido.

Delfin *Codazzi* (1824-1873), nació en Lodia i desempeñó el puesto de Profesor de Aljebra Superior i Jeometría en la Universidad de Pavía; publicó varios estudios relativos a la teoría de las superficies i a las coordenadas curvilíneas.

La Academia de Ciencias de Paris recompensó su trabajo relativo a las superficies aplicables sobre una de revolucion.

Francisco *Faa de Bruno* (1825-1888), de Alejandría, fué capitan al servicio de la casa de Saboya; despues vino a Paris, siguió los cursos de Cauchy i Leverrier, i trabó relaciones íntimas con el abate Moigo i Hermite. De vuelta a Turin, entró al sacerdocio i ocupó la cátedra de análisis superior en la Universidad. El tratado de las formas binarias es su escrito mas conocido; propúsose componer una grande obra sobre las funciones elípticas, pero la muerte lo sorprendió en la mitad de sus trabajos.

Eujenio Cárlos *Catalan* (1814-1894), natural de Brujas, fué alumno de la Escuela Politécnica i profesor en *Chalons-sur-Marne* i en Paris. Dedicóse al estudio del cálculo de las probabilidades; simplificó la teoría de los mínimos cuadrados, que imajinaran Gauss i Laplace; se ocupó en la trasformacion de las integrales múltiples i en las superficies mínimas; publicó varias notas concernientes a la trasformada plana de una curva, a las trayectorias ortogonales, a la serie harmónica i a otros diversos trabajos de órden superior. Es conocido de todos los estudiantes su *Manual del Candidato a la Escuela Politécnica* i sus *Problemas de Jeometría.*

Francisco *Brioschi* (1824-1897), es natural de Milan i fué profesor de Análisis de la Universidad de Pavía (1852), secretario Jeneral de la Instruccion Pública (1861), diputado, senador (1865), fundador del Instituto Técnico i miembro de la mayor parte de las grandes corporaciones científicas.

Durante cincuenta años publicó cerca de doscientas cincuenta memorias tocantes al áljebra, á la jeometría y al cálculo integral. Cabe mencionar sus estudios superiores sobre las líneas de curvatura, la integracion de las ecuaciones diferenciales, las tanjentes dobles de las cuárticas, las ecuaciones de derivadas parciales de segundo órden, los máximos i mínimos en el cálculo de las variaciones i la reduccion de las integrales elípticas. En Aljebra, sus publicaciones principales se refieren a los determinantes i sus aplicaciones, a la teoría de las formas aljebraicas i a la eliminacion. Fué un hábil calculista i se hizo célebre por su resolucion de la ecuación de quinto grado mediante las integrales elípticas.

Félix *Casorati* (1835-1890), profesor de áljebra, jeometría analítica i cálculo infinitesimal en la Universidad de Pavía, su ciudad natal. Sus escritos mas notables se refieren a la teoría de las funciones de una sola variable compleja, a la discontinuidad de las funciones, a las relaciones fundamentales entre los módulos de periodicidad de las integrales abelianas de primera especie i a los trabajos de Weierstrass i Mittag-Lefler sobre las funciones de una variable compleja.

Jorje Henrique *Halphen* (1844-1889) nació en Rouen i desde sus estudios en la Escuela Politécnica se hizo distinguir como aljebrista. Principió por resolver un problema de las cónicas, juntamente con Clebsch; estudió en seguida los puntos singulares de las curvas aljebraicas, y demostró que una curva plana cualquiera puede ser considerada como la perspectiva de una curva alabeada que admite un punto singular único con tanjentes separadas. La Academia de Berlin coronó su Memoria (1881) sobre las curvas alabeadas aljebraicas, que es su obra maestra; i en ella clasifica las curvas alabeadas, aplicando esta clasificacion a los veinte primeros grados i al grado 120.

Los trabajos jeométricos de Halphen se refieren a la jeometría enumerativa, es decir, a la determinacion del número de los puntos, rectas, curvas o superficies que satisfacen a ciertas condiciones dadas.

Mediante las invariantes de Laguerre, Halphen pudo integrar una clase notable de ecuaciones diferenciales, lo que le conquistó, en 1880, el gran premio de Ciencias Matemáticas propuesto por la Academia de Ciencias de Paris.

Formuló una teoría completa de las invariantes, de las ecuaciones lineales, i esto facilita la resolucion de algunas ecuaciones diferenciales i hace aumentar el número de formas integrales conocidas.

La muerte lo sorprendió en medio de la elaboracion de la obra monumental que se habia propuesto dar a luz i que tituló *Tratado de las funciones elípticas*. No obstante de haber quedado inconclusa, ha sido publicada una gran parte de esta obra.

Cárlos *Hermite* (1822-1901), es de oríjen lorenes; hizo sus estudios en Nancy i en Paris. Siendo estudiante del Liceo de Luis el Grande, se pronunció su vocacion por las ciencias esactas; comenzó a leer el *Tratado de la resolucion de las ecuaciones numéricas* de Lagrange i con sus escasas economías adquirió las *Investigaciones Aritméticas* de Gauss.

Contaba apenas 20 años de edad i ya publicaba sus investigaciones acerca de la imposibilidad de resolver la ecuacion de quinto grado. En el mismo año (1842) entra a la Escuela Politécnica; en 1843 comunica a Jacobi el resultado de sus estudios de las funciones elípticas i abelianas; en 1855 estiende a las funciones abelianas el problema de trasformacion resuelto por Abel i Jacobi para las funciones elípticas, teniendo que fundar una nueva rama del Análisis para vencer las dificultades aritméticas que encerraba cuestion tan difícil i complicada; en 1858 resuelve la ecuacion de quinto grado de un modo indirecto i análogo al método trigonométrico empleado para la resolucion de las ecuaciones de tercer grado; atraido por las variadas cuestiones que presenta el estudio de la teoría de los números, al mismo tiempo se dedica a las formas cuadráticas e introduce en ellas las variables contínuas. Así como se puede espresar un número inconmensurable en fraccion continua, de igual manera se puede proceder con f (x), desarrollada en serie segun la fórmula de Taylor. De este modo Hermite logró probar que ϵ, base de los logaritmos napieranos, es un número trascendente. Su punto de partida, en esta memoria célebre *Sobre la funcion esponencial*, publicada en 1873, es la aproximacion simultánea de cierto número de esponenciales de la forma e^{ax} por medio de fracciones racionales. Las diferencias entre estas esponenciales i las fracciones racionales o fracciones contínuas, que las presentan aproximadamente, son avaluadas con la ayuda de integrales definidas; haciendo x =t en las fórmulas, suponiendo despues que a es un número entero, resulta que e no puede satisfacer a ninguna ecuacion aljebraica con coeficientes enteros. Nueve años despues, Lindemann se inspira en los trabajos memorables de Hermite i logra demostrar que π tambien es un número trascendente. De este modo quedó establecida, en forma rigurosa i definitiva, la imposibilidad de la cuadratura del círculo, locura que se ha pretendido realizar en todos los paises i en todos los tiempos. En 1890, Weierstrass dió una demostracion directa de la trascendencia de los dos números e i π, demostracion que simplificó Hilbert en 1893. Desde tiempos de Gauss se conocia la correspondencia que existe entre los polinomios de Legendre i el desarrollo de log. $\frac{x-1}{x+1}$ en fraccion continua; i se conocian tambien las investigaciones de Heine i Cristoffel acerca de las relaciones que hai entre las fracciones contínuas i ciertas ecuaciones diferenciales de segundo órden. Hermite estiende estos conocimientos mostrando cómo cierta ecuacion de órden $n+1$ está ligada a las aproximaciones simultáneas señaladas en su memoria *Sobre la funcion esponencial.* El desarrollo de una funcion en fraccion continua i el estudio de su converjencia son materias que no han sido mas que bosquejadas; no existe para ello una fórmula jeneral, como la de Taylor; solo se conocen algunos desarrollos de funciones simples obtenidos por Laguerre.

El problema de la converjencia fué estudiado por Laguerre, Riemann i Stieltjes, discípulo de Hermite. Despues de los trabajos de Hermite, Apell i Mittag-Leffler, se puede decir que el empleo de las fracciones contínuas, como espresion de las diversas funciones de las Matemáticas, está llamado a ocupar un capítulo principal en el futuro adelanto de las ciencias esactas. Hermite se ocupó, ademas, en el estudio de la descomposicion de las funciones doblemente periódicas de la tercera especie, estudio que Appell continuó poco despues. Ademas de escritor distinguido, Hermite fué un profesor eminente. Principió sus clases en la Sorbona (1869), con la teoría de las ecuaciones; luego dejó el áljebra para dedicarse al cálculo integral i a la teoría de las funciones. Su enseñanza se componia de charlas maravillosas, sostenidas en tono grave, conforme con el asunto tratado, en las que se abrian horizontes desconocidos i que han dejado en sus alumnos i auditores un recuerdo imperecedero. La correspondencia con su discípulo Stieltjes manifiesta que ademas de ser un matemático de jenio, era un consejero paternal i bondadoso i el mejor de los amigos. La influencia que ejerció en la Sorbona ha sido estensa i duradera; i gracias a este sabio desprendido i profundo se ha podido apreciar en Francia la obra matemática de Weierstrass i Mittag-Lefler. Por otro lado, Hermite no aceptaba los refinamientos de rigor que en los últimos años se ha pretendido introducir en los fundamentos de las Matemáticas. «La admiracion es el principio del saber»,—dijo: —«me permitiria este pensamiento para espresar el deseo que tengo de que a los estudiantes se les den las cosas sencillas i bellas como parte principal, dejando como cosa secundaria el estremado rigor que hoi dia impera, sin que se aumente con esto el atractivo de nuestras ciencias, mas, por el contrario, hace su estudio fatigoso i sin provecho para el principiante que no está en condiciones de comprender su interes». En efecto, segun Picard, nadie mejor que Hermite supo despertar en los estudiantes la admiracion por lo sencillo i lo bello.

Hoenë *Wronski* (1778-1853) nació en Posen i, aunque desconocido en su tiempo, es uno de los precursores de la ciencia actual. Alcanzó en Rusia el grado de teniente coronel i dejó trabajos notables sobre la resolucion númerica de las ecuaciones i sobre diversas cuestiones de Análisis. Publicó las obras siguientes: *Filosofía del Infinito* (1814), *Mesianismo* (1831-1839). *Reforma absoluta del saber humano*, (1842-1846), etc.

José Luis Francisco *Bertrand* (1822-1900) nació en Paris, i fué un niño prodijioso; desde la edad de nueve años ya conocia el áljebra i la jeometría; a los diez i siete años era doctor en ciencias i fué recibido primero en la Escuela Politécca; obtuvo el título de injeniero de minas, pero optó por el profesorado i desempeñó las clases de Matemáticas en el Liceo de San Luis, de Análisis en la Escuela Politécnica i de Física Matemática en el Colejio de Francia. Todos los estudiantes conocen sus majistrales testos de Aritmética, de Aljebra i de Cálculo Diferencial i de Cálculo Integral. Produjo ademas numerosas Memorias que versan sobre los sistemas ortogonales, sobre la teoría de las superficies, sobre una clase de curvas cuyas normales son normales de otras curvas, sobre el número de valores que puede tomar una funcion por permutacion de letras i sobre la semejanza en mecánica, asunto tratado por Newton i Reech. Bertrand fué secretario de la Academia de Ciencias de Paris, miembro de la Academia Francesa i autor de varias obras de vulgarizacion científica i de biografía.

Edmundo *Laguerre* (1834-1886), natural de Bar-le-Duc, fué oficial de artillería, repetidor i examinador de la Escuela Politécnica i profesor en el Colejio de Francia. Es autor de unas 140 Memorias que tratan de las imajinarias i las formas en jeometría, de cálculo integral, de jeometría infinitesimal i de direccion, de la aproximacion de las funciones analíticas, de la resolucion numérica de las ecuaciones, i otros estudios superiores tratados con talento sobresaliente. La Academia de Ciencias, de que era miembro, ordenó la puclicacion de sus obras.

Tomas Juan *Stieltjes* (1856–1893) era holandes, hijo de un distinguido injeniero, hizo estudios científicos mui brillantes i entró al Observatorio de Leyde, donde se consagró durante seis años a la astronomía i a su historia. Despues de solicitar en vano un puesto de profesor de Matemáticas en la Universidad de Groninga, se resolvió a estudiar en Paris i en 1886 obtuvo un puesto en la Facultad de Ciencias de Tolosa. Su principal trabajo trata de las fracciones contínuas aljebraicas i de su converjencia. Es conocido su testo sobre la teoría de los números; i la correspondencia que sostuvo con Hermite, su maestro, ha venido a demostrar que Stieltjes era uno de los mas brillantes matemáticos de los tiempos modernos.

JEOMETRÍA ANALÍTICA

En los grandes adelantos que esta rama de las Matemáticas ha alcanzado en el siglo XIX, mencionaremos solamente los nombres de los principales matemáticos i sus obras mas conocidas.

Jacobo *Booth* (1806-1878) i Jacobo *Mac-Cullagh* (1809-1846), profesores en Dublin, tienen el mérito de haber sido dos de los primeros escritores de la Gran Bretaña que se ocuparon en este estudio.

Julio *Plücker* (1801-1868), de Bonn, introdujo nuevos desarrollos en esta ciencia; consagróse a las curvas aljebraicas i a la teoría de las congruencias i las complejas; introdujo el método de las notaciones abreviadas, las coordenadas tanjenciales i trilineares i el empleo de las formas canónicas.

Gergonne (1771-1859) nació en Nacy, fué profesor i Rector de la Academia de Ciencias de Montpellier i ejerció una grande influencia en toda Europa con la publicación de los *Anales de Gergonne*, la primera revista especial de Matemáticas publicada hasta entónces (1810-1831). Reconoció todo el valor de los trabajos de Poncelet i formuló el *príncipio de dualidad*, jeneralizacion del método de las polares recíprocas.

L. O. *Hesse* (1811-1874) de Munich, se dedicó a las curvas planas i enriqueció de un sinnúmero de propiedades elegantes el estudio de las superficies de segundo grado.

Entre los hombres de ciencia que mas han contribuido al progreso de la jeometría analítica, debemos citar a Darboux con su jeometría de las superficies; a G. H. Halphen i Appell con las particularidades de las mismas; a Zeuthen i Schubert con las singularidades de las curvas; a Nöther, Clebsch, Mobius, Kohn, Dyck, Schönflies, Van Vlech, etc.

Las mejores obras publicadas sobre la misma ciencia son la de Clebsch, editada por Lindeman; las de A. Salmon, de Briot i Bouquet, de Carnoy, etc.

Rodolfo Federico Alfredo *Clebsch* (1833-1872), de Konigsberger, desempeñó la cátedra de mecánica racional en el Politécnico de Carlsruhe i fué profesor en las Universidades de Giessen i Gotinga. Sus trabajos son mui variados i se refieren a la física matemática, al cálculo de las variaciones, a las ecuaciones con derivadas parciales de primer orden, a la teoría analítica jeneral de las curvas i las superficies, a las funciones abelianas i las invariantes; facilitó i supo aplicar los estudios tan abstractos de Riemann, i jeneralizó las funciones abelianas; introdujo en la ciencia ideas tan nuevas como fecundas; i la falta de rigor que se ha pretendido encontrar en sus escritos hai que atribuirla a los usos de su tiempo i no a defectos de su clara i superior intelijencia. Dió importancia especial a la nocion de *jénero* de una curva; refirió a la division de las funciones elípticas i abelianas la teoría de la osculacion; del estudio que hizo de las curvas *racionales* o de jénero cero pasó, en los últimos dias de su vida, a la consideracion de las superficies *racionales*. Clebsch murió muy jóven, a los 39 años de edad; i su muerte fué una gran pérdida para las ciencias esactas.

ANÁLISIS MATEMÁTICO

La primitiva concepcion de Newton i Leibnitz sobre cálculo diferencial, desde que vió la luz pública hasta hoi dia, ha tenido dilatadas i profundas trasformaciones, de suerte que es tarea larga i difícil para el historiador abarcar toda la estension recorrida en el camino de su evolucion; i punto tambien de estrema dificultad es distinguir las innumerables ramificaciones creadas en la segunda mitad del siglo XIX. El mismo concepto de *funcion* está mui distante de encerrar igual significado que tuviera un siglo atras; i los matemáticos de hace cien años tenian de este concepto la misma idea que tiene hoi el estudiante que abre por primera vez un testo de análisis moderno. Una funcion no es ya el ente que podemos representar por una curva de trazo continuo. Riemann i Weierstrass descubrieron funciones contínuas sin derivadas i a las que no corresponden ninguna curva. Peano ha encontrado funciones, tales como $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, que no son representadas por curvas sino por áreas; en efecto, cuando t varia de a a b, el punto x, y puede tomar posiciones cualesquiera dentro de cierto rectángulo. Si $f(x, y)$ es continua respecto de x i de y separadamente, *Dini* halló que puede ser discontinua respecto del conjunto de x i de y. Estos i otros ejemplos indican que el concepto de funcion es muchísimo mas complejo de lo que se imajinaron los matemáticos en otros tiempos. La tendencia jeneral de hoi es definir una funcion como coleccion de funciones simples: series de monomios o de polimonios o trigonométricas; i es el estudio profundo de dichas colecciones que ha venido a alterar la idea de nuestros antepasados de la palabra funcion. La nueva via se abrió con la nocion de las series trigonométricas. Daniel Bernouilli es el primero en demostrar que es posible satisfacer a cierta ecuacion diferencial por una serie trigonométrica; despues Fourier afirma que toda funcion puede ser representada entre los valores O y 2π del argumento, mediante un desarrollo de esta naturaleza i que un mismo desarrollo, entre estos límites, puede representar funciones correspondientes a arcos de curvas distintas; mas tarde, Dirichlet somete las series trigonométricas a un exámen severo i precisa la condicion suficiente para que un desarrollo trigonométrico represente una funcion dada en el intervalo de O á 2π; i miéntras Du Bois Reymond i Jordan prueban que una funcion continua no siempre es desarrollable en serie trigonométrica, Riemann busca en qué casos puede desarrollarse.

En otro órden de ideas entra la clasificacion de las ecuaciones diferenciales integradas desde el punto de vista de la física matemática, que depende de la teoría de las características, segun Monge, Cauchy, Backlund, Goursat i Beudon. Las características imajinarias conducen al tipo elíptico i al problema de Dirichlet, en el cual se da en un contorno cerrado un dato, sea la funcion, sea la derivada. Despues de los admirables trabajos de Riemann, Lamé, Neumann, Schwartz, Robin, Poincaré, Liapounof, Stecklof, Korn, Zaremba, Harnack i Pockels, viene la solucion casi definitiva de Fredholm, completada por Hilbert, Picard i Schmidt. Picard, por medio de aproximaciones sucesivas ha logrado integrar ecuaciones mui complicadas i despues ha procedido con igual fortuna con las ecuaciones hiperbólicas, funcionales i diferenciales ordinarias; igual aplicacion ha hecho Goursat a las funciones implícitas.

Por lo que respecta a las ecuaciones hiperbólicas, Riemann habia dado un método de integracion; Poisson i Kirchhoff estudiaron la ecuacion de las ondas esféricas, con cuatro variables independientes; i Vito Volterra la ecuacion de las ondas cilíndricas con tres variables, trabajos todos éstos que han sido continuados por O. Tedone, J. Coulon, R. d'Adhémar i Hadamard. Hai que mencionar, ademas, las interesantes contribuciones a estos estudios de los señores Delassus, Méray, Riquier, Bourlet, Le Roux, Bianchi, Nicoletti, Cotton, Hedric, Böcher, Levi-Civita, Lauricella, Holmgren i Arn. Sommerfeld.

En cuanto á los puntos singulares, llamados esenciales, que aparecen en la función e $\frac{1}{z}$, para $z=0$, Weierstrass encontró, mediante los factores primarios, que en su vecindad una funcion uniforme puede ser representada por el cuociente de dos funciones uniformes que no tienen polo de este punto singular i que, en la vecindad de tal punto, la funcion se aproxima tanto cuanto se quiera de cualquier valor dado. Los señores Picard, Schottyk i Borel han profundizado i jeneralizado estas cuestiones; Darboux se ha preocupado de la aproximacion de las funciones de los números grandes; Lindelöf de la prolongacion analítica; Appell i Picard de las funciones abelianas; Hermite, Bourget, Humbert de los grupos hiperfuchsianos e hiperabelianos; Humbert, Lerch, Picard, Stouff, Alezais de las funciones automorfas; Picard, Drach i Vessiot de la clasificacion jeneral de las trascendentes por los grupos; Lie i Darboux de la jeometría de las esferas; Fuchs, Poincaré i Painlevé de la integracion de las ecuaciones diferenciales no lineales mediante la ecuacion de Riccati; Darboux i Goursat de la investigacion efectiva de las integrales; Lerch, Apell, Picard i Goursat de las series hiperjeométricas, la inversion de las integrales dobles i el desarrollo de las funciones holomorfas; Poincaré Enriques, Castelnuovo, Humbert, Severi, Lacaze, Traynard, Betti i Hugard del *Análisis Situs*; Cantor, Baire, Vallée-Poussin, Osgood de la teoría de los conjuntos, las funciones discontínuas i la converjencia de las series uniformes o nó.

En esta ya larga enumeracion de autores i trabajos no hemos hecho mas que seleccionar la materia, guiándonos por la novedad de las cuestiones trabadas. Concluiremos con algunos detalles que servirán para completar lo anterior.

P. *Tchébychef* (1821-1894) nació en Borovk, Rusia, i como profesor de San Petersburgo hizo cursos mui leidos en que habla de las integrales definidas, las ecuaciones diferenciales, la teoría de los números i las probabilidades; en 1874 fué asociado de la Academia de Ciencias de Paris i se ha manifestado aritmético de valor i analista de talento.

Fourier concibió un sistema de ecuaciones de primer grado en número infinito, compuesto también de un número infinito de incógnitas, lo que se presenta en diversas cuestiones de análisis, i Poincaré ha demostrado, en un escrito majistral, que tales sistemas se pueden reemplazar por desigualdades también en número infinito. Entre los autores franceses de obras clásicas de Análisis, podemos citar a los señores Jordan, Picard, Humbert, Goursat, de la Vallée-Poussin, Appell, etc.

JEOMETRÍA SINTÉTICA

La jeometría sintética moderna tiene su oríjen en los trabajos de Monge (1800), de Carnot (1803) i de Poncelet (1822); i adquirió grande estension despues de los estudios de Steiner, Von Staudt i Chasles.

Jacobo *Sreiner*, el mas gran jeómetra despues de Apolonio, nació en Utzensdof, Soleure, Suiza, el 8 de Marzo de 1796, i murió en Berna el 1.º de Abril de 1863. Hijo de un simple aldeano, a los catorce años de edad no sabia aun ni leer ni escribir; mas tarde se le encuentra en Berlin, viviendo de sus modestas entradas de pasante. A los treinta i seis años publicó su famosa obra titulada *Desarrollo sistemático de las dependencias de las formas jeométricas* (1822), que contiene una discusion completa del principio de dualidad, las relaciones proyectivas i homográficas de los puntos colineales, de haces de rectas, etc. Gracias a la influencia de Crelle i Jacobi, que quedaron asombrados de la profundidad de esta obra, se creó en Berlin una cátedra especial para Steiner. Sus demas trabajos se encuentran esparcidos en los *Anales de Gergonne* i en el *Diario de Crelle* i fueron reunidos despues en su *Jeometría Sintética*; i tratan de las propiedades de las curvas aljebraicas y de las superficies, de las podarias i ruletas, de los máximos i mínimos.

La discusion de estos diversos artículos es puramente jeométrica.

Cárlos Jorje Cristian *von Staudt* (1778-1867) nació en Rotenburg, ocupó la cátedra de Matemáticas en Erlang i compuso una jeometría completamente distinta de la de Steiner i Chasles que apareció con el título de *Jeometría de posicion*; i en la cual proponia un sistema de Jeometría construída sin ninguna relacion con el número ó la magnitud; i, no obstante su forma abstracta, llegaba a establecer las propiedades proyectivas no métricas de las figuras, consideraba los puntos imajinarios, las líneas, los planos i aun obtenia una definicion jeométrica del número. Esta obra es curiosa i brillante i es la base de la *Estática Gráfica*, creada mas tarde por Culmann. Recomendamos las siguientes obras clásicas de jeometría sintética: *Tratado de Jeometría Superior* de Chasles (1822); Jeometría Sintética de Steiner (1867); *Jeometría proyectiva* de Cremona; i la *Jeometría de Posicion* de Reye (1866-1868).

Las diferencias primitivas que se distinguian entre la jeometría sintética i la jeometría analítica, van desapareciendo con el desarrollo ulterior de estas dos ciencias.

Pedro Cárlos Francisco baron *Dupin* (1784-1873), de Nevers, salió de la Escuela Politécnica a los diez i ocho años de edad con el título de Injeniero de Construcciones Navales. Sus trabajos sobre las *superficies ciclidas* son célebres. Produjo la mayor parte de sus escritos matemáticos en medio de sus numerosos trabajos de injeniero. Es el creador de la nocion de *indicatriz* tan necesaria en la teoría de la curvatura. Ademas de otros trabajos matemáticos, estudió la óptica i coadyuvó al progreso de la teoría de la resistencia de los materiales.

Miguel *Chasles* (1793-1880), natural de Chartres i alumno de la Escuela Politécnica; despues de haber llevado una vida mundana i a causa de un reves de fortuna, a los 34 años de edad reanudó sus estudios; i publicó despues su famoso *Bosquejo histórico del oríjen i desarrollo de los métodos jeométricos* (1834); escribió diversas memorias sobre la atraccion; descubrió el teorema de Green y, en 1843, obtuvo la cátedra de jeodesia y de máquinas de la Escuela Politécnica; i despues desempeñó la de Jeometría Superior, creada especialmente para él, en la Sorbona. Es autor, ademas, de un *Tratado de Jeometría Superior* i de un *Tratado de las secciones cónicas*, que son de un gran valor matemático.

Chasles entró a la Academia de Ciencias a los 58 años de edad.

Justo *Bellavitis* (1803-1880) nació en Bassano, fué educado por su padre i en 1845 fué nombrado profesor de la Universidad de Padua. En 1836 habia publicado una crítica de la Mecánica de Ventaroli; estableció diversas fórmulas de áreas, que encontró mas tarde Staudt; estudió las funciones inversas, las integrales eulerianas, la clasificacion de las curvas de 3.º i 4.º órden, la teoría de los números i publicó el *Cálculo de las equipolencias*, su obra principal. Carnot, en su *Jeometría de posicion* (1803) señalaba la importancia de introducir en jeometría un algoritmo que representara la magnitud o posicion de diversas partes de una figura; idea que realizó Bellavitis en 1835, con las ventajas siguientes: a cada propiedad de puntos colineares corresponde una propiedad de puntos coplanares; la solucion de los problemas se obtiene mas fácilmente; la teoría de las curvas se puede esponer sin acudir a las coordenadas, sus fórmulas son mas sencillas i jenerales; i la teoría de las imajinarias se presenta bajo un nuevo aspecto.

Bellavitis no pudo estender al espacio su teoría, dificultad que venció Hamilton con la creacion de los cuaternios.

Este invento i el *Cálculo Baricéntrico* de Möbius han eclipsado el algoritmo de Bellavitis.

Luis *Cremona*, (1830-1903) de Pavía, fué discípulo de Brioschi i profesó las Matemáticas en Cremona, Milan, Bolonia i Roma. De los trabajos de Steiner, Chasles i Jonquieres sacó su *Introduccion a la teoría jeométrica de las curvas planas*, obra que contiene, ademas de todas las cuestiones tratadas por otros autores, diversas ideas nuevas acerca de la razon anharmónica, la involucion, la jeneracion de las curvas planas, las polares, esteinerianas, hessianas, fórmulas de Plücker, curvas de tercer grado, etc. Tambien se ocupó en el estudio de las curvas alabeadas, las superficies regladas del 3.º y 4.º órden i las trasformaciones jeométricas. Compuso tambien *Elementos de cálculo gráficos* i *Elementos de Jeometría proyectiva*.

JEOMETRÍA INFINITESIMAL

Despues de la aparicion de la *Aplicacion del Análisis a la Jeometría* de Monge, sus discípulos Lancret i Dupin desenvolvieron las nociones de las líneas de doble curvatura i la jeneracion de las superficies. Sin embargo, el método infinitesimal tomó un gran vuelo en Francia una vez que se conoció la majistral produccion de Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827); entre los que estudiaron esta cuestion sobresalen Frenet, Bertrand, Molinas, J. A. Serret, Bouquet, Puiseux, Bonnet, Paul, Serret, que dieron mayor estension a la teoría de las curvas; Jacobi, integrando la ecuacion diferencial de las líneas jeodésicas del elipsoide; Lamé que fundó la teoría de las coordenadas curvilíneas espaciales; Ribaucour que hizo movibles los ejes coordenados. Se debe a Bonnet i Liouville la nocion de curvatura jeodésica que ya poseia Gauss; a Ribaucour, Halphen i Lie, las superficies cuyos radios de curvatura son funciones uno de otro; a Bonnet, las superficies asociadas; a Minding i Bour, la deformacion jeneral de las superficies; a Dupin, Bertrand, Hamilton, Kummer, Ribaucour, Cayley, Lamé, Jacobi, Ossian Bonnet, Sophus Lie, la teoría de las líneas de curvatura i asintóticas, las congruencias, los sistemas triples ortogonales i las líneas jeodésicas, que son, sobre las superficies, los caminos mas cortos de un punto a otro. Estos numerosos i variados progresos de la jeometría se encuentran consignados, en su mayor parte, en las dos obras del Señor Darboux, tituladas: *Lecciones sobre la teoría jeneral de las superficies*, y *Lecciones sobre los sistemas ortogonales*. Interes mui grande despiertan las curvas definidas por una ecuacion diferencial ordinaria; una de estas clases de ecuaciones tiene curvas de tres tipos diferentes, llamados por Poncairé *cuellos*, *nudos* i *focos*; i el sabio matemático sueco *Bendixon* ha establecido que existe para esta ecuacion una curva integral que pasa por el oríjen con una tanjente determinada; por último M. Hadamard ha estudiado las líneas jeodésicas de superficies de curvaturas opuestas.

JEOMETRÍA NO EUCLIDIANA

La cuestion de la esactitud de las hipótesis jeométricas ha sido examinada por Saccheri, en 1733; Lobatscheky, en 1826; Gauss, en 1831, Bolyai, en 1832; Riemann, en 1854; Cayley, Beltrami, von Helmboltz, Klein, Whitehead i otros matemáticos. Esta rama moderna de las ciencias esactas es por demas técnica i abstracta; por lo que daremos un simple bosquejo de estos nuevos conocimientos. Para que un espacio de dos dimensiones posea las propiedades jeométricas que se enseñan en la jeometría elemental o euclidiana, es necesario que, en un punto cualquiera de este espacio, se pueda construir una figura congruente con otra figura dada; i esto es posible solo cuando el producto P de los radios principales de curvatura es constante en cada punto del espacio o de la superficie. Tres clases de superficies gozan de esta propiedad: Las superficies *esféricas* (P > O), las superficies *planas*, (P = O) y las superficies *seudo-esféricas* (P < O). Ademas, si una de estas superficies es deformada sin desgarradura ni doblez, la medida de su curvatura queda constante. Estas tres clases de superficies representan tres tipos distintos que permiten la construccion de figuras congruentes. Por ejemplo, una superficie plana puede enrollarse según un cono o cilindro i será idéntica a sí misma. Estas tres clases de superficies se distinguen por una particularidad, la línea jeodésica o la menor distancia entre dos puntos. Por un punto del espacio euclidiano se puede trazar una sola recta paralela a otra; i por un punto del espacio seudo-esférico se pueden trazar varias paralelas. Se podria creer que con esto estamos en condiciones de probar fácilmente que nuestro espacio es plano, puesto que por un punto no podemos trazar mas que una paralela; mas, esto es inadmisible, por cuanto se concibe mui bien que nuestros medios de observacion nos impiden asegurar con certeza cuando dos líneas son paralelas o no; luego no podemos valernos de este recurso para afirmar que nuestro espacio es plano o nó. Otra prueba mejor podria estar basada en que si la suma de los ángulos de un triángulo difiere de dos rectos, la diferencia es proporcional al área del triángulo. Segun esto sucederia que si esta diferencia es apénas sensible en triángulos pequeños, seria apreciable en triángulos mui grandes. El espacio esférico o seudo-esférico es de estension limitada, miéntras que el espacio plano es infinito; si el espacio seudo-esférico está construido en el espacio de cuatro dimensiones, su estension puede ser infinita.

En lo anterior hemos admitido tácitamente que la medida de un segmento es independiente de su situacion. Empero, Klein ha demostrado que no es así; i ha encontrado que pueden existir tres sistemas de jeometría, la elíptica, la parabólica i la hiperbólica. Lo que hemos dicho hasta aquí se aplica al hiperespacio de dos dimensiones. Riemann encontró que hai tres clases de hiperespacios de tres dimensiones con propiedades análogas al de dos dimensiones. I aquí se presenta la nocion de superficie jeodésica, i es la que contiene enteramente una línea jeodésica.

Eujenio *Beltrami* (1835-1900) desempeñó el puesto de profesor de Aljebra i Jeometría analítica en la Universidad de Bolonia. Se hizo notable por sus *Investigaciones sobre las aplicaciones del análisis a la jeometría.* En su memoria clásica sobre la *Interpretacion de la jeometría no euclidiana* llegó a la conclusion de que los teoremas de esta jeometría se realizaban en las superficies de curvatura constante negativa, conclusion que ha sido objetada por Hilbert.

MECÁNICA

Métodos gráficos.—En la ciencia gráfica se han establecido reglas para resolver los problemas por medio de depurados, que se estudian en la jeometría proyectiva i que tienen relacion con la Jeometría Moderna. Estos procedimientos, ideados primeramente por Newton, se aplican principalmente a la mecánica, la elasticidad i la electricidad, i son particularmente útiles para el injeniero. La teoría fué establecida, en realidad, por Poncelet; mas, creemos que solo en los últimos treinta años se han escrito testos sistemáticos de esta ciencia, debiéndose mencionar en primer lugar la Graphische Statik de C. Culmann, Zürich, 1875; obra que despues fué editada por W. Ritter. En seguida vienen los testos de Estática Gráfica de A. Favaro, L. Cremona, M. Lévy, C. Sacrotti i la *Nomografía* de M. d'Ocagne.

En la obra fundamental de Culmann se principia por describir los procedimientos gráficos de las cuatro operaciones aritméticas, de la elevacion a potencias i estraccion de raices, i aquí emplea la espiral logarítmica. Hace ver, en seguida, como los volúmenes, los momentos i los momentos de inercia pueden ser representados por líneas rectas; i deduce reglas para combinar fuerzas, pares, etc.; esplica el empleo de elipsoide de inercia i termina con las aplicaciones a los puentes, vigas, enmaderacion, presion de las tierras, etc., etc.

Luis *Poinsot* (1777-1859), de Clermont-en-Beauvaisis, hijo de un tendero, se educó en el Liceo Luis el Grande, en la Escuela Politécnica i en la Escuela de Puentes i Calzadas i se estrenó en la enseñanza como profesor en un Liceo de Paris. En 1803, sus *Elementos de Estática* llamaron la atencion de los sabios i de la Academia de Ciencias; tres memorias de mecánica i astronomía, que publicó despues, le valieron el puesto de inspector jeneral de la Universidad; en su produccion sobre los polígonos i los poliedros, se describen cuatro poliedros regulares nuevos. Sin embargo, en 1652 *Broscius* ya habia encontrado los polígonos estrellados de Poinsot. En 1824 tuvo que salir de la Universidad i entónces se dedicó por entero al estudio i produjo *La nueva teoría de la rotacion de los cuerpos i la teoría de los conos circulares rodantes*, obras que son clásicas.

Guillermo Kingdon *Clifford* (1845-1879) es uno de los primeros matemáticos ingleses que preconizó los métodos gráficos sobre los analíticos. Se educó en Cambridge; en 1871 fué nombrado profesor en la Universidad de Lóndres i ha compuesto las siguientes obras: *Teoría de los bicuaternios*, *Clasificacion de los lugares*, *Teoría de los gráficos*, *Diseccion Canónica de una superficie riemanniana*, *Elementos de Dinámica.*

Mecánica Analítica.—Todos los conocimientos de los grandes matemáticos del siglo XVIII sobre la mecánica están comprendidos en la *Mecánica Analítica* de Lagrange i el

Tratado de Mecánica de Poisson; i la aplicacion a la Astronomía se encuentra resumida en la *Mecánica Celeste* de Laplace. En los últimos tiempos se han producido dos grandes obras, complementos de aquellas, el gran *Tratado de Mecánica* de P. Appell i la *Mecánica Celeste* de Tisserand. Los trabajos citados se refieren a la mecánica de los sólidos. La mecánica de los fluidos, mas complicada que la anterior, ha sido bosquejada en sus comienzos por Boussinesq, Boulanger, Masoni, Lollin, Maillet, Alievi, Jon Kowsky, Guyou, Helmholtz, Brillouin, Poncairé i Duhem. La teoría del *potencial*, debida a Lagrange (1773) i atribuida a Laplace; i de la atraccion, elaborada por Gauss, han llamado la atencion de los matemáticos del siglo XIX. Ademas, Chasles introdujo la teoría de las superficies de nivel i de las líneas de fuerza i A. F. Möbius (1790-1868), publicó su cálculo baricéntrico en 1826.

Jorje *Green* (1793-1841) de Nottingham, fué de humilde condicion, educóse por sí mismo en unos pocos libros de matemáticas que pudo conseguirse; y en 1827 se encuentra suficientemente preparado para escribir una nota sobre el potencial, i aplicar su teoría a la electricidad i al magnetismo. Sin embargo, los notables resultados a que llegó Green no fueron apreciados en su tiempo; i gracias a Gauss, que publicó en 1839 un trabajo al respecto, se pudo vulgarizar esta teoría tan importante. En 1832 Green elaboró dos memorias sobre el equilibrio de los fluidos i la teoría de las atracciones en el espacio de *n* dimensiones; en 1833 fué leida en la Sociedad Real de Edimburgo su nota relativa al movimiento de un fluido bajo la influencia de las vibraciones de un elipsoide sólido; cuatro años mas tarde escribió sobre el movimiento de las ondas en un canal i sobre la reflexion i refraccion del sonido i de la luz. Sus estudios de óptica i física son notables.

La dinámica teórica a que Jacobi habia dado su forma moderna, ha sido objeto del estudio de la mayor parte de los sabios que acabamos de nombrar; el principio de la menor accion forma parte de uno de los trabajos de Sir William Hamilton (1827); J. Bour i J. Bertrand hicieron investigaciones mui importantes sobre la dinámica. Recomendamos como obras clásicas las de E. J. Routh, de Cambridge; P. Appell, de Paris; *la integracion de las ecuaciones diferenciales de la mecánica* por Painlevé, i por J. Graindorge; i la *Filosofia Natural* de Lord Relvin i P. G. Tait. Por lo que respecta a la hidromecánica, nos contentaremos con mencionar los trabajos de Green, Sir George Stokes, Sir William Thomson (Lord Kelvin), von Helmholtz, J. J. Thomson i Lord Rayleigh.

ASTRONOMÍA TEÓRICA

Esta ciencia, que está comprendida en la Dinám ca teórica, ha sido cultivada en el siglo XIX por los sabios mas eminentes, ocupando Gauss uno de los primeros lugares, como se vió en su biografía.

Federico Guillermo *Bessel* (1784-1846), de Minden, es contemporáneo de Gauss i una de las figuras brillantes en Astronomía. Principió por ser empleado en una casa comercial hasta que en 1906 entró de ayudante en el Observatorio de Lilienthal. Despues fué nombrado director del Observatorio de Königsberg, puesto que ocupó hasta su muerte. Bessel es el autor de las funciones que llevan su nombre (1824), redujo las observaciones de 3232 estrellas hechas por Bradley i determinó la paralaje de la estrella 61 del Cisne.

Urbano Juan José *Leverrier* (1811-1877) es tambien de oríjen humilde; fué alumno de la Escuela Politécnica y profesor de Astronomía en la misma (1837). Desde 1839 calculaba con mayor esactitud que Laplace las perturbaciones planetarias; i en 1846 señalaba en el cielo la situacion de un planeta desconocido hasta entonces i que despues de descubierto se llamó Neptuno, trabajo memorable i que tuvo una gran resonancia en el mundo civilizado. Este descubrimiento venia a corroborar la lei de la gravitacion universal. En 1855 sucedió a Arago en la Direccion del Observatorio de Paris; se impuso la enorme tarea de revisar i discutir todos los datos relativos a los planetas i tuvo la satisfaccion de ver el fruto de sus trabajos.

Juan Couch *Adams* (1819-1892), de Cornwall, hizo sus estudios en Cambridge, fué profesor de astronomía, i director del Observatorio del mismo lugar; i descubrió, al mismo tiempo que Leverrier, el planeta Neptuno. Estos dos astrónomos hicieron dicho descubrimiento independientemente uno de otro; Adams revisó i corrijió los cálculos de Laplace relativos a la aceleracion secular del movimiento de la Luna (1855); i determinó la órbita de los meteóritos de las Leonidas (1867).

Félix *Tisserand* (1845-1899), de Borgoña, era hijo de un tonelero, estudió en la Escuela Normal i entró al Observatorio de Paris. Despues de haber sido Director del Observatorio de Tolosa, fué nombrado sucesor de Leverrier en la Academia de Ciencias, profesor de mecánica celeste en la Sorbona i Director del Observatorio de Paris. Su *Tratado de Mecánica Celeste* es su obra capital.

G. A. A. *Plana* (1781-1894), P. G. D. *Pontécoulant* (1795-1871), C. E. *Delaunay* (1816-1872), i P. A. *Hausen* (1795-1874), son astrónomos que se distinguieron por sus estudios concernientes al movimiento i a la teoría de la Luna. Agregaremos ademas los nombres de G. W. Hill, Simon Newcomb, G. H. Darwin, H. Poincaré, E. W. Brown, E. T. Wittaker, G. R. Kirchoff, A. J. Angstróm i Sir George G. Stokes.

FÍSICA MATEMÁTICA

Nuestra esposicion de la Historia de Matemáticas no seria completa si no hiciéramos alusion a los ádelantos realizados, mediante las ciencias esactas, en el calor, la elasticidad, la luz, la electricidad i en tantas otras ramas de la Física. Sin embargo, es tan vasta la historia de esta ciencia i tan grande la influencia que ha tenido en la civilizacion, que se ha de encontrar la relacion de los innumerables triunfos alcanzados, en la historia especial de la Física, siendo la de Poggendorff una de las mas importantes i atrayentes. En Inglaterra, los nombres de G. G. Stokes, Lord Kelvin, J. C. Maxwell, Lord Rayleigh i J. J. Thomson i sus obras, son universalmente conocidas i ocupan un lugar prominente en la Historia Contemporánea de las Ciencias. Es interesante observar que el progreso de nuestros conocimientos en Física es debido en gran parte a la aplicacion de las ciencias esactas i que en el porvenir el esperimentador mas hábil no podrá alcanzar la realizacion de sus inventos sin la ayuda poderosa de las Ciencias Matemáticas.