

ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Sucesor

De la "SOCIEDAD DE INGENIERIA" Y del "INSTITUTO DE INGENIEROS"
Fundada el 31 de Mayo de 1888 Fundado el 28 de Octubre de 1888

Con Personalidad Jurídica desde el 28 de Diciembre de 1900

Adherido a la USAI y a la CONFERENCIA MUNDIAL DE LA ENERGIA

AÑO LXI ✻ MARZO - ABRIL DE 1948 ✻ N.ºs 3 - 4
Comisión Editora: Raúl Sáez S. (Pdte.), Carlos Ponce de León y Arturo Quintana.

Ing. Oscar Schneider R.

Cálculo mecánico de líneas de transmisión aéreas

TRAMOS CON DESNIVELACION DE APOYOS

En la práctica diaria el calculista de líneas de transmisión encuentra tramos con apoyos a nivel sólo por excepción.

Generalmente el desnivel entre apoyos es pequeño en comparación de la luz del tramo y por tanto despreciable su influencia en el cálculo. Sin embargo, se presentan casos en que no es posible despreciar la influencia de la desnivelación.

Los métodos clásicos de cálculo de los tramos con grandes desniveles, conducen a cálculos largos, complicados y tediosos, por cuanto todos ellos exigen proceder por aproximaciones sucesivas.

Debido a la acción (horizontal) del viento sobre el conductor, el plano de la catenaria deja de ser vertical, lo que trae consigo variaciones en la luz y el desnivel del tramo (1).

(1) Designando por h_0 y l_0 el desnivel y la luz topográficos respectivamente y por β el ángulo diedro formado por el plano de la catenaria y el plano vertical que pasa por los apoyos, el desnivel h y la luz l del tramo para una inclinación β quedan dados por:

$$h = h_0 \cos \beta \dots\dots\dots (a)$$

$$l = l_0 \sqrt{1 + \left(\frac{h_0}{l_0}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \beta} \dots\dots\dots (b)$$

$$\text{El ángulo } \beta \text{ queda definido por: } \operatorname{tg} \beta = \frac{p_v}{p_o} \dots\dots\dots (c)$$

En (c) p_v es la carga horizontal y p_o la vertical, ambas expresadas en Kg/m.

Gran parte de la complicación de los métodos de cálculo hasta ahora conocidos se debe a que atacan el problema directamente, empleando el desnivel, la luz y la tensión reales.

Como muchos otros calculistas, he sentido la necesidad de disponer de un método de cálculo rápido y expedito, cual es el expuesto en este artículo.

El problema fundamental en el cálculo mecánico de conductores consiste en el cómputo de las fatigas o tensiones para los distintos estados de cargas y temperaturas o abreviadamente «cálculo de los cambios de estado».

Con grande aproximación el cálculo de los cambios de estado del conductor, en tramos con desnivelación de apoyos, puede reducirse al estudio de los cambios de estado de una catenaria a nivel mecánicamente equivalente. Esta catenaria equivalente tiene una luz igual a la distancia entre apoyos (del tramo desnivelado) y una tensión en su punto más alto igual a la semisuma de las tensiones en los apoyos de la catenaria desnivelada.

En el artículo «Gráficos para el cálculo de líneas de transmisión aéreas» publicado en colaboración con el Ingeniero Hurel en los N.º 7-8 de 1947 de los Anales, ha quedado resuelto en forma gráfica el cálculo de los cambios de estado de una catenaria con apoyos a nivel (2). En consecuencia, disponemos de un método gráfico, por tanto rápido y poco expuesto a errores de cálculo.

Las fórmulas y teoremas referentes a la catenaria desnivelada no se encuentran en la literatura corriente. Por esta razón he creído que sería útil e interesante exponer, en una forma quizás un poco dilatada en este artículo las fórmulas fundamentales de la catenaria desnivelada así como también el teorema de Silva y las relaciones de Géllert. (3). Las demostraciones son originales.

A. NOTACION Y UNIDADES

El significado de los diferentes símbolos empleados queda definido por el texto mismo o por las figuras auxiliares. En general hemos respetado la notación del artículo anterior, agregando a los símbolos ya utilizados subíndices apropiados.

Las unidades empleadas son:

El metro para las longitudes,
 el milímetro cuadrado para las asecciones,
 el Kg para las tensiones,
 el Kg/mm² para las fatigas, y
 el grado Celsius para las temperaturas.

Para las funciones empleamos la notación que se indica:

sen x, cos x, tg x para las funciones trigonométricas circulares,
 sen h x, cos h x, tgh x para las funciones hiperbólicas, sen⁻¹x, cos⁻¹x, tg⁻¹x
 para las funciones circulares inversas, sen⁻¹hx, cos⁻¹hx, tg⁻¹x para las funciones
 hiperbólicas inversas.

Log x..... para logaritmo natural de x.
 gd x———— para gudermaniano de x.
 gd⁻¹x———— para antigudermaniano de x.

(2) En adelante citaremos este artículo diciendo «el artículo anterior».

(3) E. Géllert N.º 256 «Sur le calcul mécanique des lignes de transmission d'énergie». Conférence Internationale Des Grands Réseaux Eléctriques. Session de 1935. Tome II.

B. FORMULAS Y TEOREMAS FUNDAMENTALES

La simple inspección de la figura 1 permite escribir las siguientes relaciones:

$$(B-1) \quad \operatorname{tg} \Psi = \frac{h}{l}$$

$$(B-2) \quad \cos \Psi = \frac{l}{d}$$

$$(B-3) \quad X_A + X_B = l$$

$$(B-4) \quad Y_A - Y_B = h$$

$$(B-5) \quad f_A - f_B = h$$

$$(B-6) \quad f_A = Y_A - a$$

$$(B-7) \quad f_B = Y_B - a$$

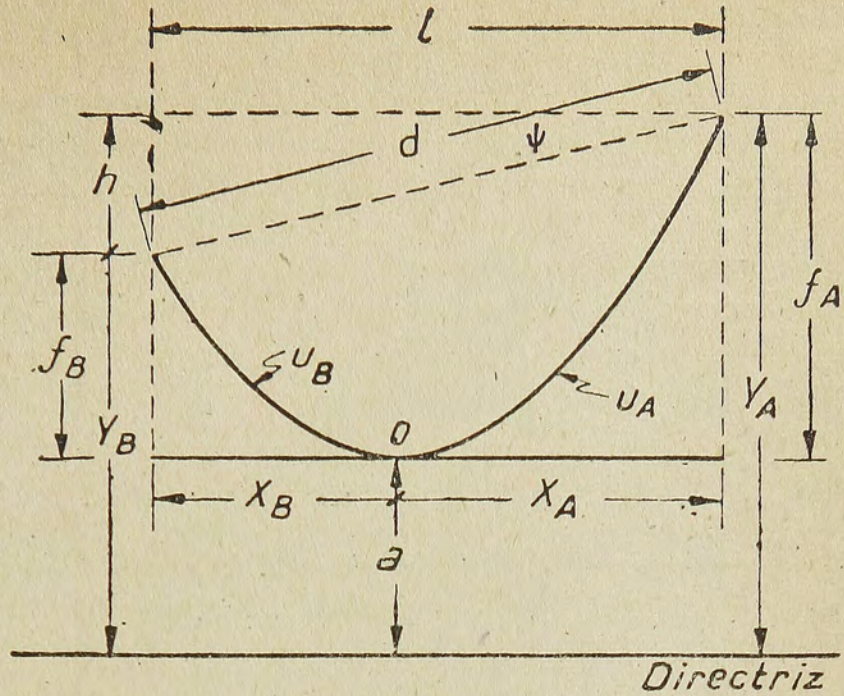


Fig. 1

Puesto que la curva de equilibrio del conductor es la catenaria podemos escribir las relaciones que siguen, designando por:

p la carga vertical (o más exactamente, la carga dirigida según la línea de máxima pendiente del plano definido por la curva de equilibrio) por unidad de longitud.

H la tensión en el punto más bajo de la curva.

T_A la tensión en el apoyo superior.

T_B la tensión en el apoyo inferior.

L^d el largo del conductor.

$$(B-8) \quad Y_A = a \operatorname{cosh} \frac{X_A}{a}$$

$$(B-9) \quad Y_B = a \operatorname{cosh} \frac{X_B}{a}$$

$$(B-10) \quad H = pa$$

$$(B-11) \quad T_A = pa \operatorname{cosh} \frac{X_A}{a}$$

$$(B-12) \quad T_B = pa \operatorname{cosh} \frac{X_B}{a}$$

$$(B-13) \quad U_A + U_B = L^d$$

$$(B-14) \quad U_A = a \operatorname{senh} \frac{X_A}{a}$$

$$(B-15) \quad V_B = a \operatorname{senh} \frac{X_B}{a}$$

Entre la catenaria desnivelada de parámetro a y la catenaria a nivel de igual parámetro y luz existen relaciones que tienen expresiones sencillas, que demostraremos (4).

Veamos previamente las fórmulas de la nivelada. Designando por:

H^n la tensión en el punto más bajo,
 T^n la tensión en los apoyos,
 L^n el largo del conductor y

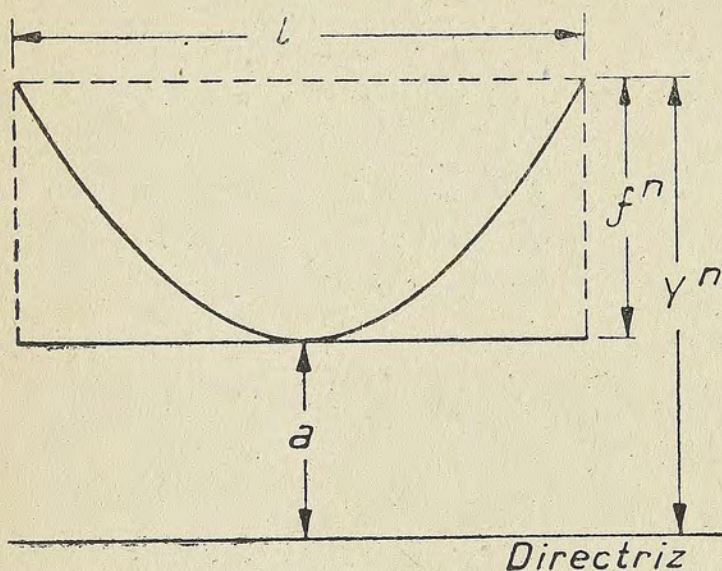


Fig. 2

utilizando las designaciones empleadas en la figura 2, tenemos:

$$(B-16) \quad Y^n = a \cosh \frac{l}{2a}$$

$$(B-17) \quad f^n = Y^n - a$$

$$(B-18) \quad f^n = a \left(\cosh \frac{l}{2a} - 1 \right)$$

$$(B-19) \quad H^n = H = pa$$

$$(B-20) \quad T^n = pa \cosh \frac{l}{2a}$$

$$(B-21) \quad L^n = 2a \sinh \frac{l}{2a}$$

De B-13/14 y 15 tenemos:

$$L^d = a \left(\sinh \frac{X_A}{a} + \sinh \frac{X_B}{a} \right) = 2a \sinh \frac{X_A + X_B}{2a} \cosh \frac{X_A - X_B}{2a}$$

Introduciendo en esta ecuación B-3 y 21 y despejando obtenemos:

$$(B-22) \quad \frac{L^d}{L^n} = \cosh \frac{X_A - X_B}{2a}$$

Las fórmulas B-4/8 y 9 permiten escribir:

$$h = a \left(\cosh \frac{X_A}{a} - \cosh \frac{X_B}{a} \right) = 2a \sinh \frac{X_A + X_B}{2a} \sinh \frac{X_A - X_B}{2a}$$

De esta ecuación, B-3 y 21 tenemos:

$$(B-23) \quad \frac{h}{L^n} = \sinh \frac{X_A - X_B}{2a}$$

Empleando la fórmula fundamental de las funciones hiperbólicas y las relaciones B-22/23 se obtiene la sencilla ecuación:

$$(B-24) \quad (L^d)^2 = (L^n)^2 + h^2$$

(4) En adelante, para designar la curva de equilibrio del conductor en un tramo con desnivelación de apoyo, emplearemos indistintamente las expresiones: «catenaria asimétrica», «catenaria desnivelada», y «desnivelada».

Para la catenaria con apoyos a nivel, de igual luz y parámetro que la anterior, utilizaremos las denominaciones: «catenaria simétrica», «catenaria nivelada» y «nivelada».

Esta expresión conocida con el nombre de teorema de Silva (3) tiene una representación geométrica dada por la figura 3 que nos permite escribir:

$$(B-25) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{L^n} = \operatorname{sen} h \frac{X_A - X_B}{2a}$$

$$(B-26) \quad \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{L^d}{L^n} = \operatorname{cos} h \frac{X_A - X_B}{2a}$$

$$(B-27) \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{h}{L^d} = \operatorname{tg} h \frac{X_A - X_B}{2a}$$

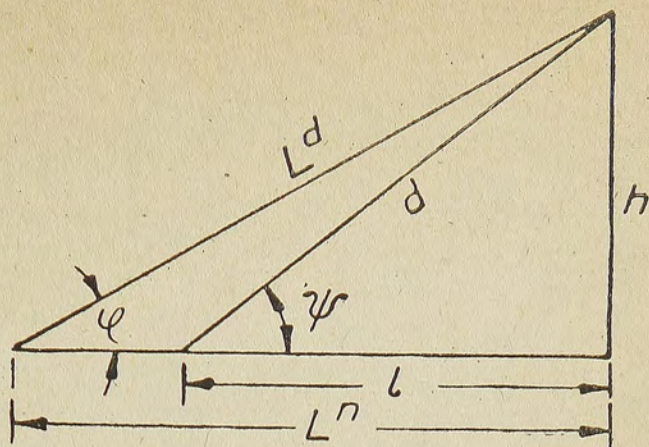


Fig. 3

Estas tres ecuaciones pueden expresarse diciendo que φ es el ángulo gudermaniano del argumento hiperbólico $\frac{X_A - X_B}{2a}$; por tanto:

$$(B-28) \quad \varphi = g d \frac{X_A - X_B}{2a}$$

$$(B-29) \quad \frac{X_A - X_B}{2a} = g d^{-1} \varphi = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Las abscisas del punto más bajo de la desnivelada quedan dadas por:

$$(B-30) \quad X_A = \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} (X_A - X_B) = \frac{1}{2} l + a \cdot g d^{-1} \varphi$$

$$(B-31) \quad X_B = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} (X_A - X_B) = \frac{1}{2} l - a \cdot g d^{-1} \varphi$$

Las ecuaciones B-32 y 33 que dan la longitud de los arcos de catenaria U_A y U_B se obtiene restando B-15 de B-14, introduciendo B-3/16/25 y combinando la expresión resultante con B-13.

$$(B-32) \quad U_A = \frac{1}{2} L^d + Y^n \operatorname{tg} \varphi$$

$$(B-33) \quad U_B = \frac{1}{2} L^d - Y^n \operatorname{tg} \varphi$$

Sumando las ecuaciones B-8/9 e introduciendo en la expresión resultante B-3/16 y 26 se obtiene:

$$(B-34) \quad \frac{1}{2} (Y_A + Y_B) = \frac{Y^n}{\cos \varphi}$$

(B—34/4/6 y 7) permiten escribir:

$$(B-35) \quad Y_A = \frac{Y^n}{\cos \varphi} + \frac{h}{2}$$

$$(B-36) \quad Y_B = \frac{Y^n}{\cos \varphi} - \frac{h}{2}$$

$$(B-37) \quad f_A = \frac{Y^n}{\cos \varphi} + \frac{h}{2} - a$$

$$(B-38) \quad f_B = \frac{Y^n}{\cos \varphi} - \frac{h}{2} - a$$

Las ecuaciones B—25 al 31 se deben a Silva. Las numeradas B—32 al 38 son originales de Gállert.

De B—34 se obtiene fácilmente la expresión B—39, que utilizaremos más adelante:

$$(B-39) \quad \frac{T^n}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} (T_A + T_B) = T_A - \frac{1}{2} p h.$$

C. LIMITES Y APROXIMACIONES

El método de cálculo de los cambios de estado, de la catenaria asimétrica, que expongo reposa en gran parte en el hecho de que, con gran aproximación, los cosenos de los ángulos φ y ψ son iguales.

Es fácil demostrar que:

$$(C-1) \quad \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left[\frac{\frac{h}{l}}{\frac{L^n}{l}}\right]^2}}$$

Tenemos además que:

$$(C-2) \quad \frac{L^n}{l} = \frac{\operatorname{sen} h \frac{l}{2a}}{\frac{l}{2a}}; \quad \frac{f^n}{l} = \frac{1}{2} \frac{\cos h \frac{l}{2a} - 1}{\frac{l}{2a}}$$

Las fórmulas C—1 y 2 demuestran que la razón entre los cosenos de los dos ángulos será tanto mayor cuanto más grandes sean el desnivel y la flecha reducida $\left(\frac{f^n}{l} = \Phi\right)$

En la práctica no se emplean, salvo casos excepcionales, flechas superiores al 7,5% de la luz ni se presentan desnivelaciones de apoyo superiores a un 50% de la luz. Comprobaremos que el error que se comete al confundir φ y ψ es muy pequeño, aun para valores de $\frac{h}{l} = 1$ y $\varnothing = \frac{f^n}{l} = 0,10$. Estos valores límites, muy superiores a los usuales son los que definen el campo máximo de aplicación del método de cálculo que se expone.

Para $\frac{f^n}{l} = 0,101\ 339\ 5 \left(\frac{L^n}{l} = 1,026\ 881 \right)$ tenemos:

$\frac{h}{l}$	$\cos \varphi$	$\cos \psi$	$\frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$	φ radianes	ψ radianes	$\varphi - \psi$ radianes
0,5	0,899 085	0,894 440	1,005 193	0,453 119	0,463 618	0,010 499
1	0,716 420	0,707 107	1,013 170	0,773 716	0,7853 98	0,011 682

E. TENSIONES MEDIAS

La tensión media de un arco de catenaria $U_2 - U_1$ queda dada por:

$$(E-1) \quad T_m = \frac{1}{U_2 - U_1} \int_{u_1}^{u_2} T \, du$$

Introduciendo:

$$T = p a \cosh \frac{X}{a} \quad ; \quad u = a \operatorname{sen} h \frac{X}{a}$$

se obtiene:

$$(E-2) \quad \begin{cases} T_m = \frac{p a^2}{U_2 - U_1} \int_{X_1}^{X_2} \cosh^2 h \frac{X}{a} d \left(\frac{X}{a} \right) \\ T_m = \frac{p a^2}{U_2 - U_1} \left(\operatorname{sen} h \frac{X_2}{a} \cosh h \frac{X_2}{a} - \operatorname{sen} h \frac{X_1}{a} \cosh h \frac{X_1}{a} + \frac{X_2 - X_1}{a} \right) \end{cases}$$

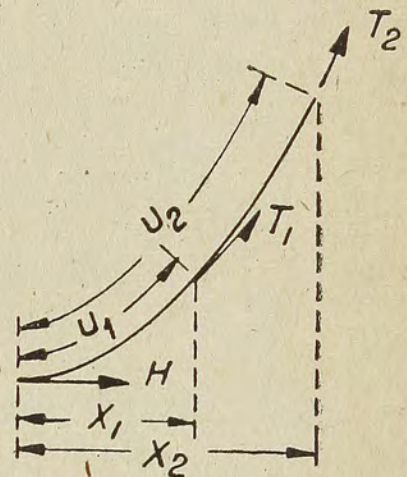


Fig. 4

Fórmula a partir de la cual puede deducirse fácilmente la siguiente:

$$(E-3) \quad T_m = \frac{1}{2 (u_2 - u_1)} \left[u_2 T_2 - u_1 T_1 + H (X_2 - X_1) \right]$$

Para deducir a partir de esta fórmula la tensión media de un conductor tendido entre dos apoyos a nivel basta hacer:

$$u_1 = -\frac{1}{2} L^n \quad ; \quad X_1 = -\frac{1}{2} l \quad ; \quad T_1 = T^n \quad ; \quad T_m = T_m^n$$

$$u_2 = \frac{1}{2} L^n ; X_2 = \frac{1}{2} l ; T_2 = T^n , \text{ obteniéndose}$$

$$(E-4) \quad T_m^n = \frac{1}{2} \left(T^n + H \frac{1}{L^n} \right)$$

o bien:

$$(E-4 \text{ bis}) \quad T_m^n = \frac{1}{2} pa \left(\frac{\frac{1}{2a}}{\text{sen } h \frac{1}{2a}} + \cos h \frac{1}{2a} \right)$$

El valor de la tensión media en el caso de apoyos desnivelados se obtiene en forma análoga, haciendo en E-3 las substituciones:

$$u_1 = -u_B ; X_1 = -X_B ; T_1 = T_B ; T_m = T_m^d$$

$$u_2 = u_A ; X_2 = X_A ; T_2 = T_A$$

$$(E-5) \quad T_m^d = \frac{1}{2L^d} \left(u_A T_A + u_B T_B + H l \right)$$

De las fórmulas B-32/33/35 y 36 puede obtenerse:

$$u_A = \frac{1}{2} L^d + \frac{T^n}{p} \text{tg } \varphi ; T_A = \frac{T^n}{\cos \varphi} + \frac{1}{2} p h$$

$$u_B = \frac{1}{2} L^d - \frac{T^n}{p} \text{tg } \varphi ; T_B = \frac{T^n}{\cos \varphi} - \frac{1}{2} p h$$

Estas expresiones introducidas en E-5 permiten escribir después de algunas transformaciones:

$$(E-6) \quad T_m^d = \frac{1}{2} \cos \varphi \left(T^n + H \frac{1}{L^n} \right) + T^n \cos \varphi \text{tg}^2 \varphi$$

Introduciendo E-4 se obtiene:

$$(E-7) \quad T_m^d = T_m^n \cos \varphi \left(1 + \frac{T^n}{T_m^n} \text{tg}^2 \varphi \right)$$

Mediante la aplicación de E-4 bis en E-7 se tiene:

$$(E-8) \quad T_m^d = T_m^n \cos \varphi \left(1 + \frac{2 \text{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{a}} \right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{\text{sen } h \frac{1}{a}} \right)$$

El factor $\frac{2}{1 + \frac{\frac{1}{a}}{\operatorname{sen} h \frac{1}{a}}}$ vale aproximadamente 1 para valores de $\frac{f^n}{l} = 0,10$, lo

cual permite escribir la fórmula aproximada:

$$(E-9) \quad T_m^d = \frac{T_m^n}{\cos \varphi}$$

F. CAMBIOS DE ESTADO. CONDICIONES FINALES (DEFORMACIONES ELASTICAS)

Designando por:

L^d el largo con tensión de la desnivelada,
 L_o^d el largo sin tensión de la desnivelada,
 E el módulo de Young del material del conductor,
 S la sección del conductor, tenemos:

$$(F-1) \quad L^d - L_o^d = \frac{1}{E_s} T_m^d \cdot L^d$$

La aplicación de B-26 y E-8 permite dar a esta ecuación la forma:

$$(F-2) \quad L_o^d = \frac{L^n}{\cos \varphi} - \frac{1}{E_s} \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{a \operatorname{sen} h \frac{1}{a}}} \right)$$

Introduciendo en esta fórmula:

$$(F-3) \quad E = E_a \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{a \operatorname{sen} h \frac{1}{a}}} \right)$$

podemos darle una forma más sencilla:

$$(F-4) \quad L_o^d = \frac{L^n}{\cos \varphi} - \frac{1}{E_s} \frac{T_m^n \cdot L^n}{\cos^2 \varphi}$$

Puesto que el factor de deformación K (2) está dado por $K = \frac{T_m}{p l} \cdot \frac{L}{l}$ puede darse a la ecuación F-4 la expresión:

$$(F-5) \quad L_o^d = \frac{L^n}{\cos \varphi} - \frac{1}{E_a} \left(K^n \frac{p l}{\sigma^n} \right) \frac{\sigma^n}{\cos^2 \varphi} \cdot l$$

σ^n es la fatiga en el apoyo de la nivelada.

Dividiendo ambos miembros de F—5 por $d = \frac{l}{\cos \psi}$ tenemos:

$$(F-6) \quad \frac{L_o^d}{d} = \frac{L^u}{1 \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}} - \frac{1}{E_a} \left(K^n \frac{pl}{s \sigma^n} \right) \frac{\sigma^n}{\cos^2 \varphi} \cdot \cos \psi$$

Haciendo $m^n = \frac{pl}{s}$ y $E_a = E_f \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$, la ecuación F—6 se convierte en:

$$(F-7) \quad \frac{L_o^d}{d} = \frac{L_n}{1 \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}} - \frac{1}{E_f} \left(K^n \frac{m^n}{\sigma^n} \right) \frac{\sigma^n}{\cos \varphi}$$

El término $\frac{m^n}{\sigma^n}$ puede escribirse:

$$(F-8) \quad \frac{m^n}{\sigma^n} = \frac{\frac{p}{s} \cdot \frac{l}{\cos \psi} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}}{\frac{\sigma^n}{\cos \varphi}} = \frac{\frac{pd}{s} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}}{\frac{\sigma^n}{\cos \varphi}} = \frac{m^e}{\sigma^e}$$

Puesto que $\frac{m^n}{\sigma^n} = \frac{m^e}{\sigma^e}$ tenemos:

$$(F-9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{L^n}{1} = \frac{L^e}{l^e} = \frac{L^e}{d \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}} \\ K^n = K^e \end{array} \right.$$

En consecuencia:

$$(F-10) \quad \frac{L_o^d}{d} = \frac{L^e}{d} - \frac{1}{E_f} \left(K^e \frac{m^e}{\sigma^e} \right) \sigma^e$$

Sabemos que la diferencia entre $\cos \varphi$ y $\cos \psi$ es muy pequeña, aceptando su igualdad tenemos:

$$(F-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} m^e = \frac{pd}{s} = m \\ K^e = K \\ \frac{L^e}{d} = \frac{L}{d} \\ \sigma^e = \sigma = \frac{\sigma^n}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} (\sigma_A + \sigma_B) \end{array} \right.$$

σ_A es la fatiga en el apoyo A de la desnivelada.

σ_B es la fatiga en el apoyo B de la nivelada.

Además, como demostraremos, E_f es prácticamente igual a E.

Introduciendo las aproximaciones que acabamos de citar en F—10, tenemos:

$$(F-12) \quad \frac{L_o^d}{d} = \frac{L}{d} - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma$$

Es fácil demostrar:

$$(F-13) \quad E_f = \frac{E}{\cos \varphi \cos \psi \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{a}} \right) \operatorname{sen} h \frac{1}{a}}$$

El error que se comete al adoptar $E_f = E$ es máximo para los límites extremos $\left(\frac{h}{l} = 1, \Phi = 0,10 \right)$ y para ellos se tiene $E_f = 0,988071 E$. Ya que el módulo de Young de los cables no se conoce con precisión mayor del 2%, el error cometido al tomar $E_f = E$ no tiene ninguna importancia.

Aceptar $d \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} = d$ equivale a admitir un error máximo de 1,3% (para $\frac{h}{l} = 1, \Phi = 0,10$) o 1% (para $\frac{h}{l} = 1, \Phi = 0,05$) en las medidas de distancia. Los métodos corrientes topográficos, empleados en tramos cortos, tienen errores que oscilan entre 0,6% y 1%, en consecuencia es aceptable emplear la ecuación aproximada F—12 que dará valores bastante exactos de la fatiga por calcular.

En los tramos de gran longitud se emplean para la medida de distancias métodos de extremadamente alta precisión, entre 0,06 y 0,10% de error. Podría entonces juzgarse que F—12 es inaplicable por contener un error grosero en la luz ficticia de cálculo; sin embargo, el hecho de que para grandes luces la tensión es insensible a las variaciones pequeñas de luz hace que la aplicación de F—12 conduzca a valores de la fatiga más precisos que los obtenidos para tramos de corta longitud. La inspección de las «curvas de temple» (fatiga del conductor, para temperatura constante, en función de la luz) que se entregan a los montadores de líneas demuestra que la familia de curvas tiene una asíntota.

Estimo que, después de la discusión hecha, queda plenamente justificado el empleo de la expresión simplificada del largo reducido sin tensión, $\frac{L_o^d}{d}$.

Designando por θ la temperatura del conductor y por λ el coeficiente de dilatación lineal del mismo, el largo reducido sin tensión a 0° Celsius queda dado:

$$(F-14) \quad \left| \frac{L_o^d}{d} \right|_o = \frac{L_o^d}{d} (1 - \lambda \theta)$$

Introduciendo F—12 en esta ecuación y desarrollando se tiene:

$$\left| \frac{L_o^d}{d} \right|_o = \frac{L}{d} - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma - \frac{L}{d} \cdot \lambda \theta + \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma \cdot \lambda \theta$$

El último término de esta ecuación es despreciable frente a los demás, eliminándolo obtenemos:

$$(F-15) \quad \left| \frac{L_o^d}{d} \right|_o = \frac{L}{d} - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma - \frac{L}{d} \cdot \lambda \theta$$

Puesto que el largo reducido sin tensión a 0°C es un invariante, puede escribirse, considerando dos estados de carga 1 y 2, la relación siguiente:

$$(F-16) \quad \left[\left(\frac{L_2}{d} - 1 \right) - \left(\frac{L_1}{d} - 1 \right) \right] - \frac{1}{E} \left[\left(K_2 \frac{m_2}{\sigma_2} \right) \sigma_2 - \left(K_1 \frac{m_1}{\sigma_1} \right) \sigma_1 \right] \\ = \lambda \left[\frac{L_2}{d} \theta_2 - \frac{L_1}{d} \theta_1 \right] = \lambda \left[\theta'_2 - \theta'_1 \right] = \lambda \left[\theta''_2 - \theta''_1 \right]$$

Hemos indicado el estado de carga con su respectivo subíndice. Hemos hecho además:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta'_2 = \frac{L_2}{d} \theta_2 \\ \theta'_1 = \frac{L_1}{d} \theta_1 \end{array} \right. \quad y \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta''_2 = A + \theta'_2 = A + \frac{L_2}{d} \theta_2 \\ \theta''_1 = A + \theta'_1 = A + \frac{L_1}{d} \theta_1 \end{array} \right.$$

siendo A una constante que representa una temperatura origen cualquiera.

La ecuación de cambio de estado F-16 se escribe simbólicamente:

$$(F-17) \quad \left| \left(\frac{L}{d} - 1 \right) - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma \right|_1^2 = \lambda \left| \frac{L}{d} \theta \right|_1^2 = \lambda \left| \theta' \right|_1^2 = \lambda \left| \theta'' \right|_1^2$$

Suprimiendo los índices se obtiene:

$$(F-18) \quad \left(\frac{L}{d} - 1 \right) - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma = \lambda \theta'$$

El lector podrá verificar que basta hacer $d = 1$ para transformar F-18 en una ecuación igual a la 18, pág. 208, del artículo anterior. Por tanto F-18 es la ecuación del gráfico N1.

Al explicar anteriormente el empleo de N1 se hizo la aproximación $\frac{L}{d} = 1$, acertada para valores reducidos de la flecha hasta del 5% ($\varnothing = 0.05$).

El modo exacto de proceder para pasar de un estado de carga a otro es el siguiente:

Sean 1 y 2 las condiciones de carga. Supongamos que se parte de la condición 1 y que de la 2 tan sólo se conoce la carga por metro y por consiguiente el valor

$m_2 = \left| \frac{pd}{S} \right|_2$. Se ubica el punto 1 como intersección de $m_1 = \left| \frac{pd}{S} \right|_1$ y $\sigma_1 \left(\phi_1 = \frac{f_1}{d} \right)$. Sobre la recta m_2 ubicamos el punto 2, en forma tal que $a-2$ represente a la escala de las temperaturas el intervalo $\left[\theta'_2 - \theta'_1 \right] = \left[\frac{L_2}{d} \theta_2 - \frac{L_1}{d} \theta_1 \right]$. Este intervalo se calculará por tanteos, aprovechando los valores $\frac{L}{d}$ dados en el mismo gráfico.

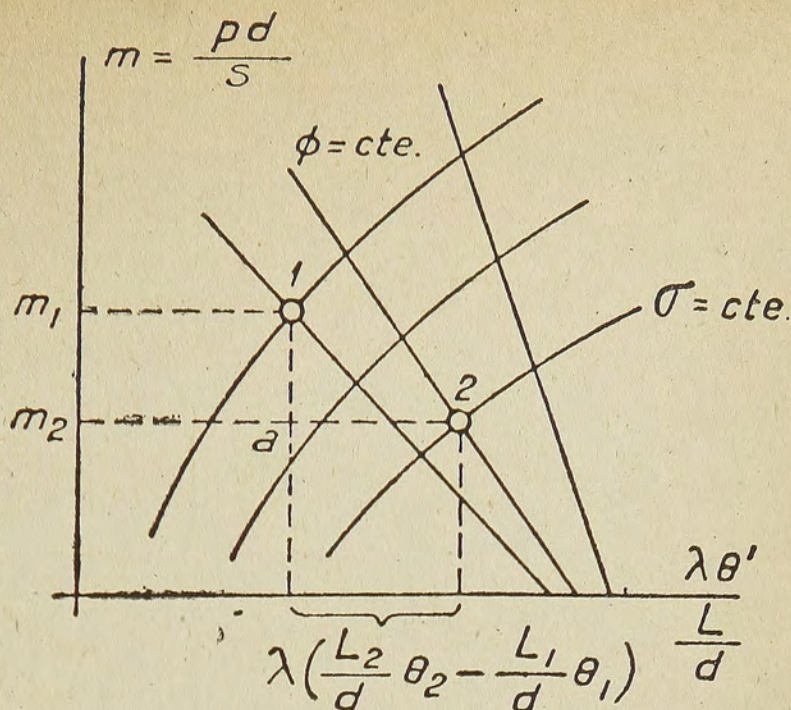


Fig. 5

G. CAMBIOS DE ESTADO. CONDICIONES INICIALES (DEFORMACIONES ELASTICAS Y PERMANENTES)

La ecuación:

$$(F-12) \quad \frac{L_o^d}{d} = \frac{L}{d} - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma$$

nos da el largo reducido sin tensión de un conductor que posee un módulo de elasticidad ya bien definido. Si en ambos miembros restamos el alargamiento permanente, i^d , correspondiente a la tensión media T_m^d , obtenemos el largo reducido sin tensión $\frac{L_o}{d}$ conductor virgen:

$$(G-1) \quad \frac{L_o}{d} = \frac{L}{d} - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma - i^d$$

Designando por ϵ^d el alargamiento plástico unitario, i^d vale:

$$(G-2) \quad i^d = \epsilon^d \frac{L^d}{d} = \epsilon^d \frac{L^n}{l} \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$$

o, con gran aproximación (para $\frac{h}{l} = 1$ y $\frac{f^n}{l} = 0,10$ el error, máximo, vale 0,083 %):

$$(G-3) \quad i^d = \epsilon^d \frac{L}{d} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$$

Es fácil demostrar que la tensión media de la catenaria equivalente (luz $d \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}$ y fatiga $\frac{\sigma^n}{\cos \varphi}$) $T_m^e = T_m$ vale:

$$(G-4) \quad T_m = \frac{T_m^n}{\cos \varphi}$$

Además:

$$(E-8) \quad T_m^d = T_m^n \cos \varphi \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{a \operatorname{sen} h \frac{1}{a}}} \right)$$

De G-4 y E-8 obtenemos:

$$(G-5) \quad \frac{T_m^d}{T_m} = \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{a \operatorname{sen} h \frac{1}{a}}} \right)$$

El segundo miembro de esta ecuación tiene un valor muy cercano a la unidad. Podemos, en consecuencia, escribir para los alargamientos plásticos unitarios:

$$(G-6) \quad \epsilon^d = \epsilon \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{a \operatorname{sen} h \frac{1}{a}}} \right)$$

siendo ϵ el alargamiento unitario correspondiente a T_m . De G-3 y 6 obtenemos:

$$(G-7) \quad i^d = \epsilon \frac{L}{d} \cos \varphi \cos \psi \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \frac{1}{a \operatorname{sen} h \frac{1}{a}}} \right)$$

Por otra parte el alargamiento permanente total correspondiente a la catenaria equivalente vale:

$$(G-8) \quad i = \epsilon \frac{L}{d}$$

Al aceptar $i = i^d$ se comete un error máximo por defecto de 1,2% despreciable dada la escasa aproximación con que se conocen las deformaciones plásticas de los cables.

Haciendo $i = i^d$ tenemos:

$$(G-9) \quad \frac{\mathcal{L}_o}{d} = \frac{L}{d} - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma - i$$

El largo reducido sin tensión del conductor virgen (que no ha sufrido tensiones) a 0°C queda dado por:

$$(G-10) \quad \left| \frac{\mathcal{L}_o}{d} \right|_o = \frac{\mathcal{L}_o}{d} (1 - \lambda \theta)$$

Desarrollando y despreciando los términos tales como

$$\frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma \cdot \lambda \theta \quad \text{y} \quad i \cdot \lambda \theta$$

obtenemos:

$$(G-11) \quad \left| \frac{\mathcal{L}_o}{d} \right|_o = \frac{L}{d} - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma - i - \frac{L}{d} \lambda \theta$$

La ecuación de los cambios de estado, cuando se toman en consideración los alargamientos permanentes, será, en forma simbólica:

$$(G-12) \quad \left| \left(\frac{L}{d} - 1 \right) - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma - i \right|_1^2 = \lambda \left| \frac{L}{d} \theta \right|_1^2$$

La ecuación que permitiría construir un gráfico para el cálculo gráfico sería:

$$(G-13) \quad \left(\frac{L}{d} - 1 \right) - \frac{1}{E} \left(K \frac{m}{\sigma} \right) \sigma - i = \lambda \left(\frac{L}{d} \theta \right) = \lambda \theta'$$

El gráfico que se obtendría sería el N2 ya que G-13 es igual a la ecuación 35, página 212, del artículo anterior.

H. VERIFICACION DE LA FATIGA EN EL APOYO MAS ALTO

Absolutamente todas las normas de cálculo mecánico de conductores indican valores máximos de la fatiga de trabajo del conductor, por regla general en porcentajes de la fatiga de ruptura del material. Es pues necesario calcular la fatiga en el apoyo superior.

De los cálculos hechos para cambios de estado se obtiene el valor de una fatiga σ que es igual a la semisuma de las fatigas en los apoyos. La aplicación de B-39, ligeramente modificada, da para la fatiga σ_A en el apoyo más alto la expresión:

$$(H-1) \quad \sigma_A = \sigma + \frac{1}{2} \frac{p h}{S}$$

J. COORDENADAS DEL PUNTO MAS BAJO DE LA CATENARIA

Para dibujar una catenaria asimétrica es necesario conocer la posición de su vértice, lo que exige el cálculo de sus coordenadas: X_A , X_B , f_A y f_B .

En las fórmulas B—30/31/37 y 38 que permiten calcular estas coordenadas aparecen el parámetro a , el coseno y el antigudermaniano del ángulo φ ; a continuación veremos su cálculo.

El coseno de φ vale:

$$(J-1) \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\frac{h}{l}}{\frac{L^n}{l}} \right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\text{tg } \psi}{\frac{L^n}{l}} \right]^2}}$$

Por tanto la $\text{tg } \varphi$ se calcula como:

$$(J-2) \quad \text{tg } \varphi = \frac{\frac{h}{l}}{\frac{L^n}{l}} = \frac{\text{tg } \psi}{\frac{L^n}{l}}$$

Hemos demostrado anteriormente que la razón $\frac{L^n}{l}$ es igual al valor de la razón entre el largo del cable y la luz para la catenaria equivalente.

Valores aproximados de $\cos \varphi$ y $\text{tg } \varphi$ se obtienen haciendo en J—1 y 2, $\frac{L^n}{l}$ igual al valor de $\frac{L}{d}$ de la catenaria nivelada de luz d y fatiga $\frac{\sigma^n}{\cos \varphi}$. La exactitud de los valores obtenidos es magnífica ya que los errores máximos, por exceso, cometidos valen (para $\frac{h}{l} = 1$ y $\Phi = 0,10 \ 134$), 0,083% y 0,040% para la tangente y el coseno respectivamente.

El valor del parámetro se obtiene de:

$$(J-3) \quad a = Y^n - f^n$$

En esta fórmula Y^n queda dado por:

$$(J-4) \quad Y^n = \frac{\sigma S}{p},$$

f^n se obtiene calculando con N1 para luz 1 y fatiga $\sigma \cos \varphi$.

El valor $\frac{1}{2} \frac{(X_A - X_B)}{a}$ igual al antigudermaniano de φ puede calcularse,

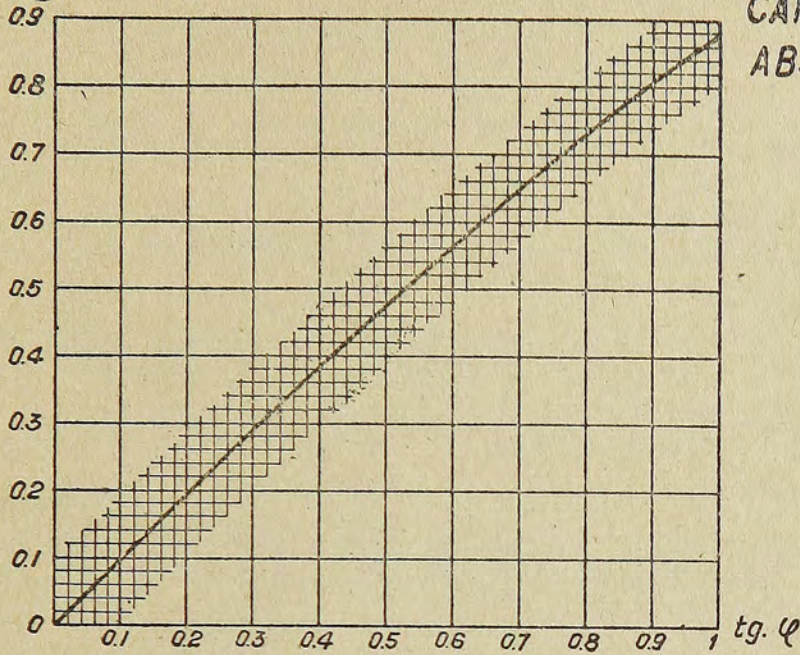
en función de $\text{tg } \varphi$, utilizando la curva o la tabla del gráfico N21, calculado con la ecuación B—29.

$$\frac{1}{2} \frac{(X_A - X_B)}{a} = g d^{-1} \psi$$

N21

CATENARIA DESNIVELADA ABSCISAS DEL VERTICE

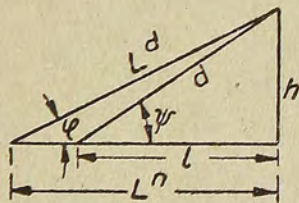
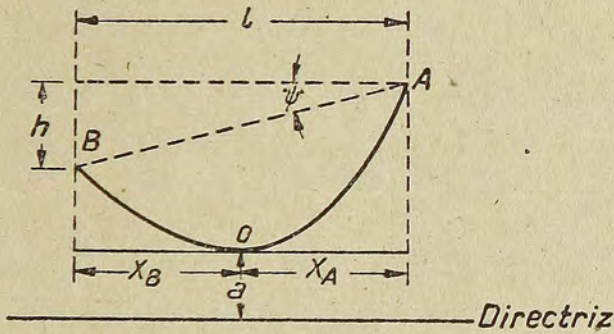
Ing. O. Schneider R.



$$X_A = \frac{l}{2} + a g d^{-1} \psi$$

$$X_B = \frac{l}{2} - a g d^{-1} \psi$$

tg. ψ	$\frac{1}{2} \frac{(X_A - X_B)}{a}$	DIF.
0.00	0.00000	0.049994
0.05	0.04994	0.04991
0.10	0.09985	0.04955
0.15	0.14940	0.04931
0.20	0.19871	0.04878
0.25	0.24749	0.04820
0.30	0.29569	0.04753
0.35	0.34322	0.04679
0.40	0.39001	0.04606
0.45	0.43507	0.04510
0.50	0.48117	0.04428
0.55	0.52545	0.04333
0.60	0.56878	0.04246
0.65	0.61124	0.04143
0.70	0.65267	0.04048
0.75	0.69315	0.03951
0.80	0.73266	0.03870
0.85	0.77130	0.03757
0.90	0.80887	0.03667
0.95	0.84554	0.03585
1.00	0.88137	



En la práctica será suficiente para el dibujo de los arcos U_A y U_B calcular sus ordenadas según una ley parabólica. En casos excepcionales será necesario proceder exactamente para lo cual podría emplearse la tabla 122, página 1238, del manual «Standard Handbook For Electrical Engineers»; Seventh Edition. 1941.

K. SAETA

Dados los métodos actualmente en práctica de tendido de conductores es preciso dar al montador el valor de la saeta F .

Se designa con el nombre de saeta a la distancia vertical entre la recta que une los puntos de fijación del cable y su paralela tangente a la curva.

Llamando X_s a la obscisa del punto de tangencia es fácil demostrar que:

$$(K-1) \quad \frac{X_s}{a} = g d^{-1} \Psi = \text{Log tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2} \right)$$

Por otra parte tenemos:

$$(B-29) \quad \frac{\frac{1}{2}(X_A - X_B)}{a} = g d^{-1} \varphi$$

Sabemos que los ángulos φ y Ψ son sensiblemente iguales, lo que nos permitiría calcular la saeta tomando como punto de tangencia la intersección entre la curva y la vertical que dimidia la luz $\left[\text{abscisa } \frac{1}{2}(X_A - X_B) \right]$ cometiendo un error máximo por defecto de 0,308%. La abscisa $\left(\frac{1}{2}(X_A - X_B) \right)$ es, como máximo, inferior en 2,13% al valor de X_s .

La figura 6 permite escribir para la saeta la expresión:

$$(K-2) \quad F = Y_B + h - \frac{X_A - X_s}{l} h - y_s$$

Tenemos además que:

$$(K-3) \quad \begin{cases} Y_s = \frac{Y^n}{\cos \varphi} - \frac{h}{2} \\ \frac{X_A - X_s}{l} h = \frac{h}{2} - a \text{tg} \psi (g d^{-1} \psi - g d^{-1} \varphi) \\ y_s = a \cosh \frac{X_s}{a} = \frac{a}{\cos \psi} = \frac{a}{\cos \varphi} + a \left(\frac{1}{\cos \psi} - \frac{1}{\cos \varphi} \right) \end{cases}$$

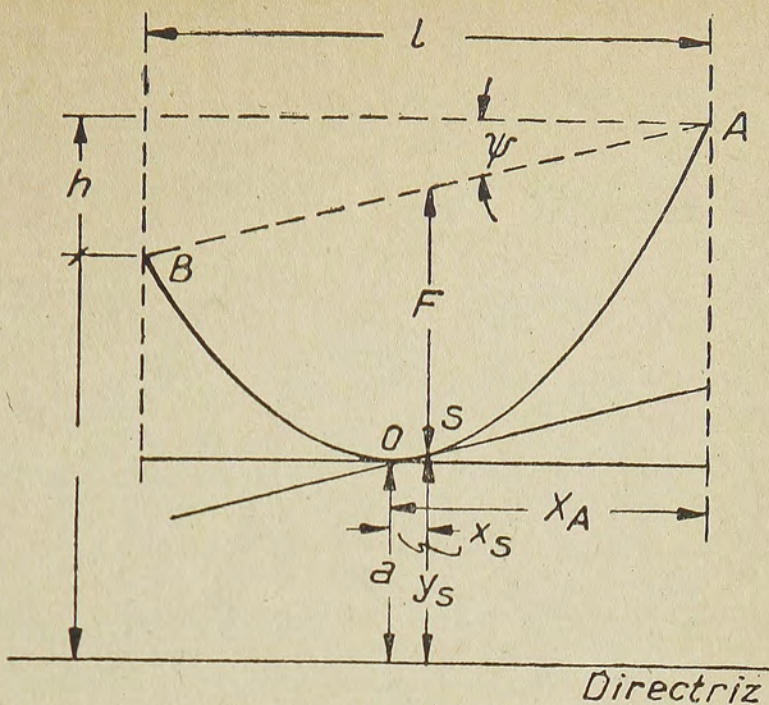


Fig. 6

Por tanto:

$$(K-4) \quad F = \frac{Y^n - a}{\cos \varphi} + a \left[\operatorname{tg} \psi (\operatorname{gd}^{-1} \psi - \operatorname{gd}^{-1} \varphi) - \left(\frac{1}{\cos \psi} - \frac{1}{\cos \varphi} \right) \right]$$

El cálculo de F , identificando X_s con el punto medio de la catenaria nos habría conducido a la expresión K—5 dada tanto por Gállert como por Rosenthal (3):

$$(K-5) \quad F = \frac{Y^n - a}{\cos \varphi} = \frac{f^n}{\cos \varphi}$$

Como hemos dicho anteriormente el empleo de esta ecuación aproximada lleva a un error máximo por defecto (para $\frac{h}{l} = 1$, $\Phi = 0,10134$) de 0,308%.

Este error insignificante, dada la aproximación con que en la práctica es posible medir la saeta, (3% en las mejores condiciones) está del lado de la seguridad, desde el punto de vista de asegurar una distancia mínima al suelo.

Al tender el conductor midiendo para la saeta su longitud aproximada la fatiga subiría como máximo en 0,255% con respecto a la de cálculo. Este error es despreciable.

Tan sólo por escepción será necesario emplear la expresión exacta de la saeta.

Es interesante hacer notar que la saeta aproximada es igual a la flecha de la nivelada equivalente.

O. S. R.